Modelování časových řad akciových výnosů#

*Jiří Trešl – Dagmar Blatná**

Cílem předloženého příspěvku je ukázat možnosti použití různých modelů vhodných pro analýzu časových řad akciových výnosů nejlikvidnějších titulů na BCPP. Primární vstupní data jsou denní uzavírací ceny v období 2001–2005, tj.1 256 hodnot. Ve druhém kroku byly vypočteny logaritmické výnosy v procentech. Pro analýzy jsme vybrali následující akcie: *CEZ (ČEZ), KB (Komerční banka), PM (Philip Morris), TEL (Český Telecom) a UNIP (Unipetrol).* V následujícím textu budeme značit odpovídající logaritmické výnosy jako *RCEZ, RKB, RPM, RTEL, RUNIP* a jejich absolutní výnosy jako *ARCEZ, ARKB, ARPM, ARTEL, ARUNIP.* V tab.1 jsou uvedeny vybrané elementární popisné charakteristiky.

Tab. č. 1: Elementární popisné charakteristiky logaritmických výnosů

	RCEZ	RKB	RPM	RTEL	RUNIP
Průměr	+0,16	+0,11	+0,09	+0,00	+0,11
Směr.odchylka	+1,99	+1,98	+1,88	+2,39	+2,43
Var.rozpětí	26,91	19,69	22,59	26,22	35,40
Dolní kvartil	–0,79	–1,.00	–0,81	–1,05	–0,78
Horní kvartil	+1,22	+1,31	+1,04	+1,11	+1,12
Šikmost	–1,01	–0,18	–0,64	–0,30	–0,59
Špičatost	+9,10	+2,01	+6,57	+4,33	+9,71

Zdroj: vlastní výpočty pomocí software Statgraphics Plus 3.1.

Článek je zpracován jako jeden z výstupů výzkumného projektu *Analýza vysokofrekvenčních dat na finančních trzích* registrovaného u Grantové agentury České republiky pod evidenčním číslem 402/05/0128.

* Doc. Ing. Jiří Trešl, CSc.; Katedra statistiky a pravděpodobnosti, Fakulta informatiky a statistiky, VŠE v Praze, tresl@vse.cz.

Doc. Ing. Dagmar Blatná, CSc.; Katedra statistiky a pravděpodobnosti, Fakulta informatiky a statistiky, VŠE v Praze, blatna@vse.cz.

Modely GARCH

Vzhledem k přítomnosti heteroskedasticity se modely GARCH staly standardním nástrojem v oblasti modelování finančních časových řad (Bollerslev, 1986). Symetrický AR-GARCH (p, q) model lze vyjádřit jako

$$y_t = \sigma_t e_t \qquad e_t \approx N(0,1)$$
$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-1}^2 \tag{1}$$

kde σ_t^2 – podmíněný rozptyl.

Obecnější možností je použití modelu EGARCH (Exponential GARCH), umožňující zachytit případnou asymetrickou reakci na kladné a záporné hodnoty (Hamilton, 1994)

$$\log\left(\sigma_t^2\right) = \omega + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \log\left(\sigma_{t-j}^2\right) + \sum_{i=1}^{q}\left(\alpha_i \left|\frac{y_{t-i}}{\sigma_{t-i}}\right| + \gamma_i \frac{y_{t-i}}{\sigma_{t-i}}\right) \tag{2}$$

V tab.2 jsou uvedeny vypočtené hodnoty parametrů jednotlivých GARCH modelů.

Tab. č. 2: Statisticky významné (5%) parametry GARCH modelů pro výnosy

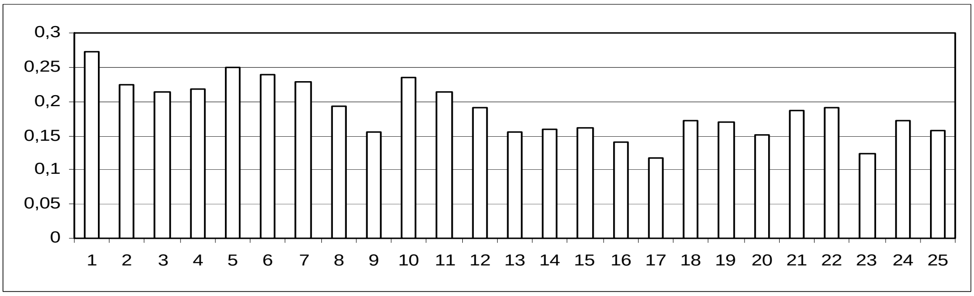
MODEL	Parametr	RCEZ	RKB	RPM	RTEL	RUNIP
GARCH	Konstanta	0,222	-	0,098	x	0,108
GARCH	ω	x	-	x	x	x
GARCH	$\alpha 1$	0,168	-	0,100	0,099	0,234
GARCH	$\beta 1$	0,743	-	0,853	0,901	0,766
EGARCH	ω	-	0,127	-	-	-
EGARCH	$\gamma 1$	-	–0,114	-	-	-
EGARCH	$\alpha 1$	-	0,193	-	-	-
EGARCH	$\beta 1$	-	0,904	-	-	-

Zdroj: vlastní výpočty pomocí software Eviews 5.

Modely ARFIMA

Význačným rysem mnoha finančních časových řad je „dlouhá paměť" vzhledem k absolutním hodnotám nebo čtvercům. Autokorelační funkce (ACF) potom klesá relativně pomalu hyperbolickým způsobem (obr. 1).

Obr. č. 1: Autokorelační funkce absolutních hodnot výnosů ARTEL (zpoždění 1–26)



Zdroj: vlastní výpočty pomocí software Statgraphics Plus 3.1.

Užitečným nástrojem pro modelování takových časových řad je generalizace ARIMA modelů ve smyslu připuštění neceločíselného diferencování. Nejjednodušší model frakcionálního diferencování označujeme jako ARFIMA(0,d,0). Může být zapsán ve tvaru (Hosking, 1981):

$$(1-B)^d\, y_t = u_t \qquad (1-B)^d = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{d(d-1)\ldots(d-k+1)}{k!}B^k \tag{3}$$

kde B – operátor zpětného posunutí,
d – řád diferencování,
u_t – bílý šum.

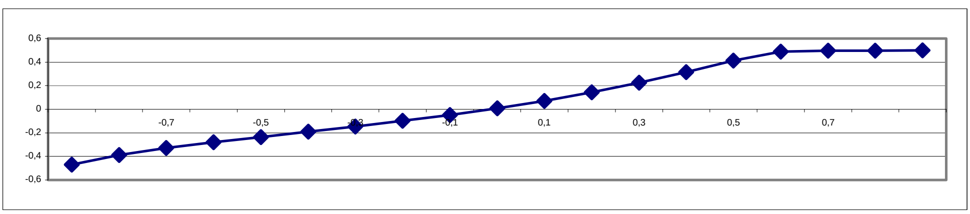
Jako příklad uvažujme tzv. relaxační proces ve tvaru (Peters, 1994):

$$y_t = \rho y_{t-1} + \sqrt{1-\rho^2}\, u_t \qquad -1 < \rho < +1 \qquad u_t \approx R(0,1) \tag{4}$$

kde ρ – korelační koeficient,
R – rovnoměrné rozdělení.

Aplikací modelu ARFIMA(0,d,0) získáme hledaný řád diferencování *d*. Výsledky jsou znázorněny na obr. 2.

Obr. č. 2: Relaxační proces: závislost řádu diferencování d na korelačním koeficientu



Zdroj: vlastní výpočty pomocí software PcGive 10.

Kladné hodnoty *d* signalizují určitou tendenci k perzistentnímu chování (tvoření cyklů), zatímco záporné hodnoty *d* odpovídají antiperzistentnímu chování (více bodů obratu než u procesu bílého šumu). Vypočtené hodnoty *d* pro absolutní hodnoty výnosů jsou sestaveny v následující tabulce.

Tab. č. 3: Statisticky významné (5%) hodnoty *d* pro absolutní hodnoty výnosů

	ARCEZ	**ARKB**	**ARPM**	**ARTEL**	**ARUNIP**
d	+0,170	+0,130	+0,138	+0,204	+0,244

Zdroj: vlastní výpočty pomocí software PcGive 10.

Dále byly vypočteny hodnoty *d* pro časové řady 5denní a 10denní směrodatné odchylky výnosů reprezentující volatilitu.

Obr. č. 3: Statisticky významné (5%) hodnoty *d* pro 5denní a 10denní volatilitu výnosů

5denní směr.odchylka	**RCEZ**	**RKB**	**RPM**	**RTEL**	**RUNIP**
d	+0,414	+0,408	+0,380	+0,408	+0,410
10denní směr.odchylka					
d	+0,185	+0,168	+0,232	+0,351	+0,257

Zdroj: vlastní výpočty pomocí software PcGive 10.

Všechny hodnoty *d* jsou kladné, tj. existuje tendence k tvoření cyklů volatility. Dále jsou hodnoty *d* pro 10denní volatilitu vždy nižší než pro 5denní volatilitu. Konečně je tento pokles relativně nízký pro RTEL a relativně vysoký pro RCEZ a RKB.

Bilineární modely

Jinou možnost představuje použití bilineárních modelů, které mohou být obecně zapsány ve tvaru (Tsay, 2002):

$$y_t = c + \sum_{i=1}^{p} \phi_i y_{t-i} - \sum_{j=1}^{q} \theta_j u_{t-j} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{s} \beta_{ij} y_{t-i} u_{t-j} + u_t \,, \tag{5}$$

kde u_t − bílý šum.

Aplikací těchto modelů na výnosy postupně dostaneme:

$$\begin{aligned} &RCEZ: \quad y_t = 0.169 - 0.064 y_{t-2} - 0.111 y_{t-1}\, u_{t-1} \\ &RKB: \quad y_t = 0.076 y_{t-4} - 0.091 y_{t-3}\, u_{t-1} \\ &RPM: \quad y_t = 0.105 - 0.069 y_{t-2} - 0.069 y_{t-4} - 0.053 y_{t-2}\, u_{t-2} + 0.053 y_{t-3}\, u_{t-2} \\ &RTEL: \quad y_t = 0.063 y_{t-4} - 0.061 y_{t-1}\, u_{t-3} + 0.066 y_{t-2}\, u_{t-1} + 0.055 y_{t-3}\, u_{t-3} \\ &RUNIP: \quad y_t = 0.105 y_{t-1} - 0.080 y_{t-1}\, u_{t-2} + 0.053 y_{t-3}\, u_{t-3} \end{aligned} \tag{6}$$

V těchto výrazech byly ponechány pouze koeficienty statisticky významné na 5% hladině významnosti. Ve všech případech bylo použití bilineárních modelů oprávněné. Odpovídající modely pro 5denní volatilitu jsou:

$$
\begin{aligned}
&VOL5-RCEZ: && y_t = 0.973 + 0.359 y_{t-1}\\
&VOL5-RKB: && y_t = 1.131 + 0.280 y_{t-1}\\
&VOL5-RPM: && y_t = 0.835 + 0.261 y_{t-1} + 0.151 y_{t-3}\\
&VOL5-RTEL: && y_t = 0.532 + 0.330 y_{t-1} + 0.188 y_{t-2} + 0.176 y_{t-4}\\
&VOL5-RUNIP: && y_t = 0.929 + 0.461 y_{t-1} + 0.109 y_{t-1}\, u_{t-1} - 0.110 y_{t-2}\, u_{t-1}
\end{aligned} \tag{7}
$$

Zde jsou naopak dostačující AR modely s výjimkou volatility RUNIP. Nakonec byly vypočteny modely pro 10denní volatilitu výnosů:

$$
\begin{aligned}
&VOL10-RCEZ: && y_t = 1.000 + 0.244 y_{t-1} + 0.159 y_{t-5}\\
&VOL10-RKB: && y_t = 1.364 + 0.216 y_{t-1}\\
&VOL10-RPM: && y_t = 1.118 + 0.300 y_{t-1} + 0.069 y_{t-2}\, u_{t-2}\\
&VOL10-RTEL: && y_t = 0.60 + 0.307 y_{t-1} + 0.371 y_{t-2} - 0.251 y_{t-1}\, u_{t-3} + 0.22 y_{t-2}\, u_{t-3}\\
&VOL10-RUNIP: && y_t = 0.907 + 0.260 y_{t-1} + 0.263 y_{t-4} + 0.102 y_{t-2}\, u_{t-1}
\end{aligned} \tag{8}
$$

Ve třech případech tedy bylo nutno použít bilineární modely. Všechny výpočty byly provedeny pomocí software PcGive 10.

R/S analýza

R/S analýza (Rescaled Range Analysis) patří mezi metody, které se mimo jiné ukázaly být užitečné při klasifikaci chování finančních časových řad a k detekci případných nepravidelných cyklů . Obecný postup R/S analýzy je následující (Peters, 1994):

- Je dána časová řada hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_N$ registrovaných v časech $t = 1, 2, \ldots, N$
- Celou časovou řadu rozdělíme do m sousedících a nepřekrývajících se intervalů délky n, a tedy $N = mn$ a pro každý interval vypočteme:
- Průměrnou hodnotu

$$\bar{x}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \qquad j = 1, 2, ..., m \tag{9}$$

- Časovou řadu kumulativních odchylek od průměru

$$z_{kj} = \sum_{i=1}^{k}\left(x_{ij} - \bar{x}_j\right) \quad k = 1, 2, ..., n \tag{10}$$

- Rozpětí kumulativních odchylek od průměru

$$R_j = \max\left(z_{kj}\right) - \min\left(z_{kj}\right) \geq 0 \tag{11}$$

- Směrodatnou odchylku

$$S_j = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_{ij} - \bar{x}_j\right)^2} \tag{12}$$

- Průměrné přeškálované rozpětí *R/S* pro interval délky n

$$\left(R/S\right)_n = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\left(R_j/S_j\right) \tag{13}$$

Hurst předpokládal obecný typ závislosti *R/S* na čase ve tvaru

$$\left(R/S\right)_n = Cn^H \tag{14}$$

kde C je konstanta a H *Hurstův exponent*, který lze odhadnout pomocí lineární regrese

$$l\log\left[\left(R/S\right)_n\right] = \log C + H\log n \tag{15}$$

pomocí hodnot přeškálovaných rozpětí vypočtených pro různá *n.* Interpretace Hurstova exponentu je pak následující: Je-li $H = 0{,}50,$ pak je časová řada generována i.i.d. procesem. V rozmezí $0{,}50 < H < 1{,}00$ se jedná o tzv. *persistentní procesy* charakterizované dlouhou pamětí. Naproti tomu do rozmezí $0 < H < 0{,}50$ spadají tzv. *antipersistentní procesy,* které mění znaménko častěji než ryze náhodné procesy. V následující tabulce jsou uvedeny hodnoty Hurstova exponentu pro jednotlivé výnosy.

Tab. č. 4: Hodnoty Hurstova exponentu pro jednotlivé výnosy

	RCEZ	**RKB**	**RPM**	**RTEL**	**RUNIP**
H	0,535	0,499	0,472	0,498	0,539

Zdroj: vlastní výpočty pomocí software Chaos Data Analyzer 2.1.

Závěr

Z analýz provedených pomocí GARCH modelů vyplývá, že symetrický model GARCH(1,1) byl postačující pro modelování časových řad akciových výnosů ve všech případech kromě výnosů Komerční banky, kde bylo nutno použít exponenciálního GARCH modelu (typické hodnoty příslušného koeficientu β_1 v tab. 2 jsou 0,7–0,9). Aplikace modelů ARFIMA na časové řady absolutních hodnot akciových výnosů vedla ke zjištění, že potřebný řád frakcionálního diferencování *d* se pohybuje v rozmezí 0,13 (Komerční banka) až 0,24 (Unipetrol). U časových řad 5denní volatility činily typické hodnoty $d \approx 0{,}4$, zatímco u časových řad 10denní volatility kolísaly v rozmezí 0,17–0,35. Použití bilineárních modelů bylo nutné ve všech případech akciových výnosů, v případě 5denní volatility pouze v jednom a u 10denní volatility ve třech případech. Nejvyšší hodnoty Hurstova exponentu vykazovaly časové řady výnosů akcií ČEZ a Unipetrol, což je v souladu s jejich celkovým růstovým trendem.

Literatura

[1] BOLLERSLEV, T., 1986: Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity. *Journal of Econometrics*, 1986, 31, s. 307–327.

[2] HAMILTON, J., 1994: *Time Series Analysis.* Princeton, Princeton University Press, 1994.

[3] HOSKING, J., 1981: Fractional Differencing. *Biometrika*, 1981, 68, s. 165–176.

[4] TSAY, R., 2002: *Analysis of Financial Time Series.* New York, Wiley, 2002.

[5] PETERS, E., 1994: *Fractal Market Analysis.* New York, Wiley, 1994.

Modelování časových řad akciových výnosů

Jiří Trešl – Dagmar Blatná

Abstrakt

V předložené studii jsou aplikovány vybrané metody analýzy finančních časových řad na denní výnosy nejlikvidnějších akcií na českém kapitálovém trhu. Ve většině případů jsou symetrické GARCH(1,1) modely zcela postačující. K modelování časových řad absolutních hodnot výnosů a jejich volatility slouží modely ARFIMA, umožňující zachytit „dlouhou paměť" generujících procesů. Jinou možností je použití bilineárních modelů, které se ukazují být vhodné zejména pro výnosy. Vypočtené hodnoty Hurstových exponentů signalizují v některých případech tendenci ke tvoření cyklů (ČEZ, Unipetrol).

Klíčová slova: finanční časové řady; akciové výnosy; GARCH modely.

Modelling of Stock Returns Time-Series

Abstract

In the study submitted, selected methods of financial time-series analysis are applied to daily returns of the most liquid stocks at Czech capital market. In most cases, symmetric GARCH(1,1) models are quite satisfactory. Further, ARFIMA models enabling to catch „long memory" of underlying processes are suitable for the modelling both absolute values of returns and their volatility. Alternative posibility is to employ bilinear models, which prove to be suitable namely for returns. Hurst exponents computed signalize some tendency to cycles creation in some cases (ČEZ, Unipetrol).

Key words: financial time-series; stock returns; GARCH models.

JEL classification: C22