Analýza disperzních efektů pro robustní návrh [#]

Eva Jarošová – Pavel Zimmermann [*]

V posledních letech se v literatuře zabývající se řízením jakosti často zmiňuje robustní návrh. Rozumí se tím takový stav procesu, kdy sledovaný výstup je málo citlivý na nekontrolovatelné změny některých veličin, ať už jde o některé parametry procesu či vlivy prostředí. Robustního návrhu se docílí vhodným nastavením některých faktorů. Faktory, které lze k tomuto účelu použít, určíme na základě vhodně naplánovaného experimentu. Protože robustní návrh znamená redukci variability sledované veličiny, hraje při jeho určování podstatnou roli analýza tzv. disperzních efektů. Nezkoumá se tedy jen vliv faktorů na střední hodnotu odezvové proměnné jako při tradičním přístupu navrhování experimentů, ale také vliv na její rozptyl. V literatuře lze nalézt různé přístupy k dosažení robustního návrhu, a to jak z hlediska uspořádání experimentu, tak z hlediska jeho vyhodnocení. Doporučované postupy jsou pro ilustraci aplikovány na reálná data z praxe a stává se, že stejná data jsou analyzována různými autory a ne vždy jsou závěry analýz totožné. Příčin může být několik. Používané statistické testy nemají stejnou účinnost, skutečné rozdělení testové statistiky se může lišit od aproximativního a test je pak ve skutečnosti progresivnější či konzervativnější. Dalším důvodem může být existence heteroskedasticity, již některé z doporučovaných metod neberou v úvahu.

Článek popisuje simulační studii, jejímž cílem bylo porovnat dvě strategie identifikace disperzních efektů. Při analýze simulovaných výsledků experimentu jsme se zaměřili na důsledky existence heteroskedasticity. Kromě postupu, spočívajícího v modelování charakteristiky variability a zmiňovaného v souvislosti s robustním návrhem nejčastěji, jsme vyzkoušeli i další přístup, při němž se modeluje přímo odezvová proměnná. Abychom postihli existující heteroskedasticitu, použili jsme však místo běžně užívaného klasického normálního modelu zobecněný model s odhadem parametrů pomocí vážené metody nejmenších čtverců. Vyzkoušeli jsme přitom různé způsoby modelování heteroskedasticity, abychom zjistili, který z nich je nejvýhodnější jednak pro identifikaci faktorů způsobujících heteroskedasticitu, jednak pro odhad vah a identifikaci disperzních efektů v zobecněném modelu. Vycházeli jsme přitom z článku (viz Davidian – Carroll, 1987), v němž byly odvozeny asymptotické vlastnosti odhadů strukturálních parametrů různých modelů heteroskedasticity. Zkoumali jsme, zda některé závěry vyplývající z tohoto článku platí i při konečných, relativně malých výběrech. Konkrétní podoba simulovaného experimentu a volba některých pevných parametrů odpovídá experimentu publikovanému poprvé v rámci diskuse o robustním

[#] Článek je zpracován jako jeden z výstupů výzkumného projektu *Rozvoj metodiky pro zvyšování způsobilosti procesů* registrovaného u interní grantové agentury pod evidenčním číslem IG 410035.

[*] doc. Ing. Eva Jarošová, CSc.; Katedra statistiky a pravděpodobnosti, Fakulta informatiky a statistiky, VŠE v Praze, jarosova@vse.cz.
Ing. Pavel Zimmermann – doktorand; Katedra statistiky a pravděpodobnosti, VŠE v Praze, zimmerp@vse.cz.

návrhu (viz Pignatiello – Ramberg, 1985) a diskutovanému později i v knihách jiných autorů (viz McCullagh – Nelder, 1989, str. 365 a Wu – Hamada, 2000, str. 438). Simulace byla provedena pomocí programu Matlab.

Princip robustního návrhu

Při hledání robustního návrhu se rozlišují dvě hlavní skupiny faktorů, nazvěme je řiditelné a rušivé. Řiditelné faktory máme i během normálního procesu plně pod kontrolou, úrovně jednou nastavené zůstávají neměnné. Rušivé faktory se naopak během normálního procesu nekontrolovaně mění buď v čase nebo s polohou, což se projevuje nežádoucí variabilitou výstupu. Předpokládá se však, že během experimentu je možné tyto rušivé faktory alespoň do určité míry ovládat. Řiditelné faktory mohou mít vliv na střední hodnotu odezvy, na její rozptyl, nebo nemusejí mít vliv vůbec. Faktory, které mají vliv na rozptyl, nazveme disperzními faktory (bez ohledu na to, zda mají vliv také na střední hodnotu). Podstatou robustního návrhu je identifikace vlivných řiditelných faktorů, nastavení disperzních faktorů tak, aby se redukovala variabilita, a následný posun střední hodnoty procesu směrem k cílové hodnotě pomocí faktorů, které mají vliv jen na střední hodnotu.

V článku uvažujeme typické uspořádání experimentu pro robustní návrh, kdy při každé kombinaci řiditelných faktorů existují replikace přes různá nastavení rušivých faktorů (v daném případě jediného rušivého faktoru S). Pravé replikace, tj. opakovaní zkoušek při stejné kombinaci všech uvažovaných faktorů, tedy i rušivých, nejsou pro robustní návrh úplně typické, nicméně v publikovaném experimentu, z něhož naše studie vycházela, tyto replikace existovaly. To znamená, že při každé kombinaci řiditelných faktorů B až E (viz tab. 1) se provedlo r zkoušek pro každou ze dvou úrovní faktoru S, tedy celkem $2r$ zkoušek. Kombinace úrovní řiditelných, případně rušivých faktorů se určují podle dílčího či úplného faktoriálního návrhu (tab. 1).

Strategie modelování pro robustní návrh

Běžně se doporučuje konstrukce dvou modelů, jednoho pro charakteristiku polohy, druhého pro charakteristiku variability. V článku se omezíme jen na druhý z modelů. Uvažujeme-li dílčí faktoriální návrh 2^{N-p}, kde N je počet řiditelných faktorů a p určuje, jaký zlomek úplného faktoriálního návrhu se provede, je počet různých kombinací řiditelných faktorů, tedy počet bodů návrhu, roven 2^{N-p}. Při počtu kombinací rušivých faktorů q určíme z $q.r$ hodnot odezvy v každém bodě návrhu výběrový rozptyl, resp. jeho logaritmus, a jeho hodnoty považujeme za hodnoty vysvětlované proměnné. Logaritmická transformace má tři cíle: normalitu, homoskedasticitu a linearitu či aditivitu. Po této transformaci se již použije regresní model s normálním rozdělením náhodné složky (s nulovou střední hodnotou a konstantním rozptylem)

$$\ln s_i^2 = \mathbf{z}_i^T \boldsymbol{\gamma} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, ..., 2^{N-p} \tag{1}$$

Vektor $\mathbf{z}_i^T$ značí i-tý řádek matice $\mathbf{Z}$. Sloupce matice (až na první sloupec jedniček) odpovídají řiditelným faktorům, případně jejich interakcím, $\boldsymbol{\gamma}$ je vektor parametrů s konstantou γ_0 na prvním místě. Faktory identifikované v tomto modelu jsou disperzní faktory. Chceme-li se vyhnout logaritmické transformaci, modelujeme přímo výběrový rozptyl s^2 a použijeme obecný lineární model s gama rozdělením a s logaritmickou „link“ funkcí. Tuto alternativu však v popisované simulační studii neuvažujeme.

Druhou možností je konstrukce modelu hodnot odezvy y. Je-li počet kombinací rušivých faktorů q, potom máme celkem $q \cdot 2^{N-p}$ bodů návrhu.

$$y_{ij} = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, ..., q \cdot 2^{N-p}, \quad j = 1, 2, ..., r, \tag{2}$$

Vektor $\mathbf{x}_i^T$ značí i-tý řádek matice návrhu **X**. Sloupce matice **X** odpovídají jak řiditelným, tak rušivým faktorům a jejich interakcím. Pro identifikaci disperzních faktorů jsou podstatné interakce řiditelného a rušivého faktoru. Vektor $\boldsymbol{\beta}$ představuje neznámé parametry s konstantou β_0 na prvním místě. Index j rozlišuje hodnoty odezvové proměnné ve stejném bodě návrhu při existenci $r > 1$ replikací experimentu. Existenci heteroskedasticity zahrneme předpokladem $\varepsilon_{ij} \approx N(0, \sigma_i^2)$. V modelu heteroskedasticity, který slouží jednak k identifikaci faktorů, které ji způsobují, jednak k odhadu rozptylu náhodné složky v různých bodech návrhu, se jako vysvětlovaná proměnná použije buď některá funkce reziduí eij z modelu (2), kde parametry byly odhadnuty obyčejnou metodou nejmenších čtverců (OLS), nebo, v případě $r > 1$ replikací, také funkce výběrových rozptylů s^2 vypočtených z r hodnot. V naší studii byly použity veličiny $|e|$, e^2, ln e, s, s^2 a ln s. Potvrdí-li se přítomnost heteroskedasticity, použije se odhad rozptylu náhodné složky k odhadu vah pro zobecněný lineární model. Vyjádříme-li model heteroskedasticity obecně jako

$$v_i = \mathbf{z}_i^T \boldsymbol{\gamma} + \varepsilon_i, \tag{3}$$

přičemž v_i zastupuje různé vysvětlované proměnné, a označíme-li vyrovnané hodnoty z modelu heteroskedasticity obecně symbolem $\hat{v}$, jsou odhady vah jak při použití reziduí, tak při použití výběrových rozptylů po řadě $1/\hat{v}^2$, $1/\hat{v}$, $1/(\exp \hat{v})^2$. Parametry modelu (2) potom odhadujeme váženou metodou nejmenších čtverců (WLS). Cílem je zabránit zkreslení odhadu kovarianční matice vektoru odhadů a zlepšit tak identifikaci interakcí mezi řiditelnými a rušivými faktory. T-testy parametrů modelu (3) předpokládají normální rozdělení a proto v případě uvedených vysvětlujících proměnných nemusejí být příslušné p-hodnoty přesné. Předpokládáme, že tato skutečnost neovlivní zásadně identifikaci modelů.

Poznámka: Pro přehlednost používáme v modelech (1) a (3) stejné značení matice návrhu a vektoru parametrů a ve všech modelech stejné označení náhodné složky. Jejich konkrétní podobu či odlišnosti popisujeme slovně.

Simulační studie

Studie vycházela, jak bylo uvedeno, z publikovaného experimentu. Cílem experimentu bylo snížit kolísání průhybu nezatížené pružiny kolem cílové hodnoty na minimum. Kromě čtyř faktorů *teplota* (B), *doba ohřevu* (C), *doba přesunu z pece do lisu* (D) a *doba zatížení v lisu* (E) byl do experimentu zahrnut rušivý faktor *teplota olejové lázně* (S). Bylo použito stejné experimentální schéma, tj. dílčí faktoriální experiment 2^{4-1} pro faktory B až E, to znamená osm různých nastavení řiditelných faktorů, u každého faktoru se nastavují dvě úrovně, označené symboly „–“ a „+“ . Každé z těchto osmi nastavení bylo kombinováno jak s nižší, tak s vyšší úrovní rušivého faktoru S. Schéma experimentu pro r = 3 replikace s hodnotami uvedenými v původním článku (viz Pignatiello – Ramberg, 1985) je pro lepší představu uvedeno v tab. 1. V simulační studii se ovšem v každém cyklu analyzovaly jiné hodnoty y.

V každém bodě návrhu určeném kombinací úrovní faktorů B, C, D, E a S bylo simulováno r hodnot odezvy y_{ij} (i = 1, 2, ..., 16 a j = 1, 2, ..., r) odpovídajících modelu (2). V matici **X** každému faktoru a interakci odpovídá právě jeden sloupec tvořený při zvoleném kódování hodnotami –1 a 1. Parametry při daném kódování vyjadřují přímo efekty faktorů a interakcí. Předpokládáme-li, že na úroveň hodnot odezvy mají vliv faktory B, C, S a interakce CS a omezíme-li se na nenulové parametry, můžeme psát $\boldsymbol{\beta}^T = (\beta_0, \beta_B, \beta_C, \beta_S, \beta_{CS})$, kde β_B značí efekt faktoru B atd. Rozptyl normálního rozdělení náhodné složky ε_{ij} byl určen vztahem

$$\sigma_i^2 = \exp(\mathbf{z}_i^T \boldsymbol{\gamma}), \quad i = 1, 2, ..., 16. \tag{4}$$

Odpovídají-li sloupce matice **Z** (kromě prvního) faktorům B a C a je-li vektor parametrů $\boldsymbol{\gamma}^T = (\gamma_0, \gamma_B, \gamma_C)$, znamená to, že faktory B a C způsobují rovněž heteroskedasticitu. Hodnoty parametrů β_0, β_B, β_C, β_S a γ_0 byly pevné, konkrétně $\beta_0 = 7{,}7$, $\beta_B = 0{,}2$, $\beta_C = 0{,}16$, $\beta_S = \; = -0{,}24$ a $\gamma_0 = -4{,}5$. Parametr β_{CS} nabýval postupně hodnot 0,32; 0,16; 0,08 a 0, parametry γ_B a γ_C jsme volili stejně velké, ale opačného znaménka, přičemž γ_B nabýval hodnot 3,5; 2,5; 1,5; 1; 0,5 a 0. Počet replikací r se měnil v rozsahu 1 až 6.

Tab. č. 1: Schéma experimentu

	Faktor				Odezva y					
Bod	B	C	D	E	S–			S+		
1	–	–	–	–	7,78	7,78	7,81	7,50	7,25	7,12
2	+	–	–	+	7,94	8,00	7,88	7,32	7,44	7,44
3	–	+	–	+	7,50	7,56	7,50	7,50	7,56	7,50
4	+	+	–	–	7,56	7,62	7,44	7,18	7,18	7,25
5	–	–	+	+	8,15	8,18	7,88	7,88	7,88	7,44
6	+	–	+	–	7,69	8,09	8,06	7,56	7,69	7,62
7	–	+	+	–	7,63	7,75	7,56	7,59	7,56	7,75
8	+	+	+	+	7,56	7,81	7,69	7,81	7,50	7,59

Zdroj: Pignatiello – Ramberg, 1985

Výsledky získané simulací byly analyzovány jednak s použitím modelu (1), jednak pomocí modelu (2) a (3). U druhého modelu byla použita jak metoda OLS, tak metoda WLS s různými odhady vah. Při konstrukci matice **X** nebo **Z** je v případě dílčího faktoriálního experimentu třeba vzít v úvahu směšování efektů. V daném případě jsou hlavní efekty B, C, D a E smíšeny (po řadě) s třífaktorovými interakcemi CDE, BDE, BCE a BCD a interakce BC, BD a BE s interakcemi DE, CE a CD. To znamená, že pokud v matici návrhu vystupují faktory B, C, D, E, případně S a interakce BC, BD, BE, případně BS, CS, DS, ES a BCS, BDS a BES, nemohou již být zařazeny DE, CE atd., protože by matice návrhu obsahovala shodné sloupce. Při použití modelu (1) vzniká problém s odhadem rozptylu reziduální složky, protože zařazením všech odhadnutelných efektů, tedy efektů faktorů B, C, D, E a interakcí BC, BD a BE se vyčerpají všechny stupně volnosti. Existuje několik způsobů, jak tuto situaci řešit, my jsme se však (vzhledem k uvedené volbě hodnot parametrů při simulaci) při identifikaci disperzních efektů pomocí modelu (1) omezili jen na hlavní efekty B a C, to znamená, že matice **Z** měla v tomto případě jen tři sloupce, což znamenalo pět stupňů volnosti pro odhad reziduálního rozptylu. Při identifikaci disperzních efektů pomocí (2) jsme do modelu zařadili všechny odhadnutelné efekty. Při r = 1 ovšem nastává stejný problém jako u modelu (1). V tomto případě jsme se omezili na efekty faktorů B, C, D, E, S, BC, BD, BE, BS, CS, DS a ES. Rezidua e pro modelování heteroskedasticity byla vypočtena na základě „správného“ modelu (2), tedy jako rozdíl simulované hodnoty a vyrovnané hodnoty modelu obsahujícího jen faktory B, C, S a interakci CS, tedy matice **X** měla pět sloupců. Při identifikaci heteroskedasticity pomocí modelu (3) jsme problém s odhadem rozptylu reziduální složky vyřešili podobně jako v případě modelu (1). V každém cyklu jsme uložili p-hodnoty odpovídající t-testům efektů B a C v modelech (1) a (3) a p-hodnoty u interakce CS v modelu (2) při různých odhadech vah. Pro každou kombinaci parametrů modelů proběhlo 1 000 simulací. Přitom jsme sledovali, kolikrát byla p-hodnota u každého z t-testů menší než zvolená hladina významnosti 0,05. Vypočtené relativní četnosti vztahující se k t-testu efektu γ_B v modelu heteroskedasticity (3) jsou pro různé hodnoty parametrů $\gamma_B = -\gamma_C$, různý počet replikací r a vysvětlované proměnné s, s^2, ln s, $|e|$, e^2 a ln e uvedeny v tab. 2.

V tab. 3 jsou uvedeny jednak relativní četnosti vztahující se k t-testu efektu interakce β_{CS} v modelu (2), jednak relativní četnosti odpovídající t-testu efektu γ_C v modelu (1). Jednotlivé řádky tab. 3 odpovídají po řadě t-testu interakce β_{CS} při použití obyčejné metody nejmenších čtverců (označeno y), t-testu interakce β_{CS} při použití vážené metody nejmenších čtverců s vahami odhadnutými na základě modelu heteroskedasticity s odpovídající vysvětlovanou proměnnou (označenou s, s^2 atd.) a t-testu efektu γ_C v modelu (1) (označeno rovněž (1)). Pro nedostatek místa jsou uvedeny jen výsledky pro β_{CS} = 0,16.

Tab. č. 2: Empirická síla t-testu efektu γ_B v modelu heteroskedasticity

	$r = 1$						$r = 2$					
	γ_B						γ_B					
	3,5	2,5	1,5	1	0,5	0	3,5	2,5	1,5	1	0,5	0
s	x	x	x	x	x	x	0,63	0,53	0,31	0,17	0,08	0,04
s^2	x	x	x	x	x	x	0,23	0,22	0,18	0,12	0,06	0,03
$\ln s$	x	x	x	x	x	x	0,83	0,58	0,26	0,14	0,07	0,04
$\|e\|$	0,22	0,21	0,16	0,12	0,08	0,08	0,82	0,76	0,52	0,29	0,12	0,05
e^2	0,14	0,13	0,10	0,09	0,06	0,06	0,59	0,55	0,40	0,25	0,11	0,05
$\ln e$	0,19	0,17	0,11	0,09	0,06	0,07	0,64	0,60	0,34	0,18	0,09	0,04
	$r = 3$						$r = 4$					
	γ_B						γ_B					
	3,5	2,5	1,5	1	0,5	0	3,5	2,5	1,5	1	0,5	0
s	0,94	0,89	0,64	0,36	0,13	0,04	1	0,99	0,82	0,54	0,18	0,04
s^2	0,47	0,50	0,41	0,27	0,12	0,04	0,67	0,69	0,61	0,42	0,16	0,04
$\ln s$	0,99	0,94	0,64	0,35	0,11	0,04	1	1	0,84	0,52	0,17	0,04
$\|e\|$	0,99	0,97	0,78	0,51	0,19	0,05	1	1	0,91	0,65	0,21	0,04
e^2	0,89	0,85	0,66	0,45	0,18	0,05	0,96	0,96	0,85	0,61	0,24	0,05
$\ln e$	0,88	0,85	0,54	0,30	0,12	0,05	0,95	0,94	0,69	0,41	0,13	0,04
	$r = 5$						$r = 6$					
	γ_B						γ_B					
	3,5	2,5	1,5	1	0,5	0	3,5	2,5	1,5	1	0,5	0
s	1	0,99	0,92	0,66	0,24	0,05	1	1	0,97	0,76	0,30	0,06
s^2	0,77	0,79	0,74	0,56	0,21	0,04	0,87	0,88	0,84	0,67	0,28	0,05
$\ln s$	1	1	0,93	0,66	0,23	0,04	1	1	0,98	0,77	0,29	0,05
$\|e\|$	1	1	0,96	0,78	0,28	0,05	1	1	0,99	0,84	0,35	0,05
e^2	1	0,99	0,94	0,76	0,28	0,04	1	1	0,98	0,82	0,35	0,04
$\ln e$	0,98	0,98	0,80	0,49	0,18	0,04	0,99	1	0,88	0,57	0,2	0,05

Tab. č. 3: Empirická síla t-testu efektu β_{CS} v modelu (2) a efektu γ_C v modelu (1)

	$r = 1$						$r = 2$					
	γ_B						γ_B					
	3,5	2,5	1,5	1	0,5	0	3,5	2,5	1,5	1	0,5	0
y	0,13	0,25	0,40	0,47	0,52	0,54	0,35	0,61	0,88	0,95	0,97	0,98
s	x	x	x	x	x	x	0,53	0,53	0,70	0,88	0,96	0,97
s^2	x	x	x	x	x	x	0,51	0,76	0,92	0,93	0,94	0,96
$\ln s$	x	x	x	x	x	x	0,31	0,54	0,81	0,88	0,93	0,94
$\|e\|$	0,13	0,25	0,40	0,47	0,52	0,54	0,47	0,51	0,79	0,93	0,98	0,98
e^2	0,16	0,32	0,49	0,55	0,59	0,60	0,51	0,76	0,91	0,92	0,96	0,97
$\ln e$	0,16	0,33	0,48	0,55	0,59	0,60	0,47	0,65	0,86	0,93	0,96	0,97
(1)	0,15	0,08	0,05	0,04	0,03	0,04	0,98	0,95	0,89	0,87	0,85	0,81
	$r = 3$						$r = 4$					
	γ_B						γ_B					
	3,5	2,5	1,5	1	0,5	0	3,5	2,5	1,5	1	0,5	0
y	0,44	0,77	0,97	1	1	1	0,53	0,88	1	1	1	1
s	0,65	0,62	0,83	0,98	1	1	0,76	0,65	0,92	1	1	1
s^2	0,61	0,90	0,97	0,96	0,98	1	0,71	0,95	0,99	0,96	0,99	1
$\ln s$	0,43	0,76	0,97	0,99	1	1	0,53	0,88	1	1	1	1
$\|e\|$	0,59	0,56	0,90	0,99	1	1	0,70	0,58	0,95	1	1	1
e^2	0,61	0,90	0,97	0,96	0,99	1	0,71	0,95	0,98	0,97	1	1
$\ln e$	0,58	0,81	0,97	0,99	1	1	0,67	0,91	1	1	1	1
(1)	1	1	0,98	0,97	0,96	0,93	1	1	1	0,99	0,99	0,98
	$r = 5$						$r = 6$					
	γ_B						γ_B					
	3,5	2,5	1,5	1	0,5	0	3,5	2,5	1,5	1	0,5	0
y	0,62	0,94	1	1	1	1	0,69	0,97	1	1	1	1
s	0,83	0,70	0,95	1	1	1	0,87	0,74	0,97	1	1	1
s^2	0,78	0,98	0,99	0,97	0,99	1	0,84	0,99	1	0,97	1	1
$\ln s$	0,61	0,94	1	1	1	1	0,68	0,97	1	1	1	1
$\|e\|$	0,80	0,60	0,97	1	1	1	0,85	0,65	0,98	1	1	1
e^2	0,78	0,98	0,99	0,98	1	1	0,84	0,99	0,99	0,98	1	1
$\ln e$	0,75	0,95	1	1	1	1	0,78	0,98	1	1	1	1
(1)	1	1	1	1	1	0,99	1	1	1	1	1	1

Závěr

V modelu heteroskedasticity byly při volbě $|e|$ jako závislé proměnné efekty faktorů B a C identifikovány nejčastěji, modelování výběrových rozptylů s^2 vedlo téměř vždy k nejhorším výsledkům. Při menším počtu replikací (r = 1 až 4) byly výsledky modelování e^2 horší než výsledky u $|e|$, při r rovno 5 a 6 už byly srovnatelné. Četnosti u ln|e| byly při větších efektech a r rovno 1 a 2 větší než u e^2, jinak však byly menší než v případě |e| i e^2. Pokud jde o použití různých funkcí výběrového rozptylu, u ln$s$ byly výsledky lepší než u s při větších efektech a r rovno 2 a 3, pro větší r už byly srovnatelné. Pro r rovno 3 až 6 byl ln$s$ lepší nebo srovnatelný s ln$e$. Pro lns byly výsledky srovnatelné s |e| jen u větších efektů, s klesající velikostí efektů četnost klesala rychleji než u |e|. Jinak se při simulaci potvrdily očekávané vlastnosti síly testu, to znamená, že četnost případů, kdy p-hodnota byla menší než hladina významnosti 0,05, neboli empiricky zjištěná síla testu rostla s velikostí efektů a s počtem replikací.

Interakce CS byla v modelu (2) při použití metody WLS identifikována častěji než metodou OLS. Nejlepší výsledky jsme dostali při použití vah odhadnutých na základě modelu s^2 nebo e^2, o něco horší bylo použití vyrovnaných hodnot z modelu ln|e|. Váhy odhadnuté pomocí s a |e| vedly k lepším výsledkům jen pro největší efekty, jinak byly četnosti menší. Použití ln$s$ pro $r > 2$ vedlo ke stejným výsledkům jako metoda OLS, při $r = 2$ byly výsledky horší. Při simulaci se také potvrdil očekávaný růst síly t-testu interakce CS s klesající velikostí parametrů γ_B a γ_C.

Při porovnání dvou strategií identifikace disperzních efektů, tedy modelu (1) a (2), budeme u druhého modelu uvažovat případ s vahami odhadnutými pomocí e^2. Protože parametr u interakce BS byl při simulaci nulový, má smysl porovnávat jen výsledky identifikace disperzního faktoru C. Pokud v modelu (2) neexistuje heteroskedasticita nebo je velmi slabá ($\gamma_B = -\gamma_C = 0$ nebo $\gamma_B = -\gamma_C = 0,5$), je identifikace faktoru C pomocí modelu (2) při menším počtu replikací úspěšnější než pomocí (1). Rozdíl mezi četnostmi se zvětšuje ve prospěch modelu (2) s klesající velikostí efektu CS. Tuto tendenci lze vysvětlit větší silou příslušného testu díky většímu rozsahu výběru. Při větším počtu replikací jsou výsledky srovnatelné. Při silnější heteroskedasticitě jsou četnosti při použití modelu (1) vyšší. To je ovšem způsobeno tím, že faktor C působí jednak v interakci s rušivým faktorem S, jednak je zdrojem heteroskedasticity. Model (1) nerozlišuje mezi těmito dvěma vlastnostmi faktoru C, model (2) může postihnout pouze první vlastnost. Faktor C jako zdroj heteroskedasticity ovšem můžeme identifikovat pomocí modelu (3).

Na základě provedené studie lze soudit, že k identifikaci disperzních efektů je výhodnější zvolit model odezvové proměnné (2). Existuje-li v modelu heteroskedasticita, odhadnou se parametry modelu váženou metodou nejmenších čtverců. Pro odhad vah je nejlepší vycházet z modelu heteroskedasticity, kde jsou jako vysvětlující proměnná použity výběrové rozptyly s^2 nebo čtverce reziduí. Identifikaci modelu heteroskedasticity je však nejlepší provádět pomocí absolutních hodnot reziduí získaných z modelu (2) metodou nejmenších čtverců.

Literatura

[1] DAVIDIAN, M. – CARROLL, R. J., 1987: Variance Function Estimation. JASA, *Theory and Methods,* 1987, roč. 82, č. 400, s. 1079–1091.

[2] PIGNATIELLO, J. J. – RAMBERG, J. S., 1985: “Discussion of ‘Off-Line Quality Control, Parameter Design, and the Taguchi Method’ by Kackar, R.N.,” *Journal of Quality Technology,* 1985, roč. 17, s. 198–206.

[3] McCULLAGH, P. – NELDER, J. A., 1989: *Generalized Linear Models.* London, Chapman & Hall, 1989.

[4] WU, C. F. J. – HAMADA, M., 2000: *Experiments. Planning, Analysis, and Parameter Design Optimization*. New York, J. Wiley & Sons, 2000.

Analýza disperzních efektů pro robustní návrh

Eva Jarošová – Pavel Zimmermann

Abstrakt

Robustní návrh omezuje nežádoucí variabilitu procesu. Důležitou úlohu přitom hraje identifikace disperzních efektů. K vyhodnocení experimentu, v němž cíleně měníme úrovně rušivých faktorů, se používají dva hlavní přístupy. Modeluje se buď funkce výběrového rozptylu vypočteného z replikací zkoušek přes různé úrovně rušivých faktorů, nebo přímo hodnoty odezvové proměnné. Identifikaci disperzních efektů může komplikovat existence heteroskedasticity. Cílem simulační studie popsané v článku bylo porovnat různé způsoby modelování heteroskedasticity a účinnost obou hlavních přístupů. Omezili jsme se přitom na předpoklad normálního rozdělení náhodné složky a k identifikaci disperzních efektů jsme použili t-test.

Klíčová slova: disperzní efekty; heteroskedasticita; zobecněný lineární model.

Analysis of dispersion effects for robust design

Abstract

Robust design reduces excessive process variation. Identification of dispersion effects plays an important role in it. Two main approaches are used to analyze the experiment where levels of noise factors are changed on purpose. Either the function of sample variance computed from replications over various levels of the noise factors, or response values themselves are modelled. The presence of heteroscedasticity may complicate the identification of dispersion effects. The aim of the simulation study described in the paper was to compare various ways of modelling heteroscedasticity and the efficiency of both main approaches. We confined ourselves to the assumption of normal random errors and used the t-test to identify the dispersion effects.

Key words: dispersion effects; heteroscedasticity; generalized linear model.

JEL classification: G30