ATERNATIVNÍ MODELY PRODUKCE V EKONOMICKÉ TEORII

Martin Dlouhý*

1. Úvod

Výroba (produkce) znamená vložení výrobních faktorů do procesu, který přemění vložené faktory na výrobky. Mezi množstvím a strukturou výrobků a množstvím a strukturou výrobních faktorů existuje určitá funkční závislost, kterou se ekonomové pokouší popsat pomocí produkčních funkcí. Produkční funkce modeluje výrobu jako proces technické přeměny vstupů (výrobních faktorů) na výstupy (výrobky). Je třeba zdůraznit, že produkční funkce je abstraktním modelem, který zachycuje pouze nejpodstatnější vlastnosti výrobního procesu. Ve skutečném výrobním procesu mohou mít důležitou roli další faktory, jako např. dobrá lokalita, kvalitní informační a komunikační systém, motivace pracovníků, poruchovost strojů, počasí a jiné. Takto složitý výrobní proces není možné dobře matematicky vyjádřit a rozumně s ním pracovat. Proto se při tvorbě musíme omezit na n nejdůležitějších faktorů. V obecné formě vyjádříme produkční proces s více výrobky a více faktory ve tvaru:

$$f(y_1, y_2, ..., y_m, x_1, x_2, ..., x_n) = 0,$$

kde se m výrobků v množství (y_1, y_2,…, y_m) vyrábí za pomoci n výrobních faktorů v množství (x_1, x_2,..., x_n). V tomto jednoduchém vyjádření produkční funkce předpokládáme, že neexistují meziprodukty, které jsou výrobkem v jednom procesu a faktorem v jiném. K tomuto ještě obecnějšímu pojetí se v příspěvku vrátíme v části 3.2. Zde je nutno připomenout, že výše uvedený vztah nedefinuje produkční funkci v matematicky obvyklém významu funkce, tj. jednoznačné přiřazení reálného čísla n-tici reálných čísel. V ekonomické literatuře se pojem „produkční funkce“ užívá v širším pojetí jako vztah (proces transformace) mezi výrobními faktory a výrobky.

Produkční funkce lze využít na makroúrovni (národní hospodářství) i na mikroúrovni (podniky). Výrobními faktory v podniku jsou například zaměstnanci, suroviny, materiály, stroje, budovy, půda atd. Pro kvantitativní ekonomickou analýzu výrobního procesu pomocí produkční funkce předpokládáme kvantitativní charakter vstupů a výstupů. Jinými slovy, že existuje určitá měrná jednotka, kterou se dají vstupy a výstupy spolehlivě měřit. Stanovení konkrétní matematické podoby produkční funkce a jejích parametrů umožňuje tyto typy kvantitativních ekonomických analýz: kvanti-

* Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky (dlouhy@vse.cz).
Článek vznikl za podpory GA ČR v rámci projektu č. GA402/09/0231 *Modely hodnocení efektivnosti a výkonnosti rozhodovacích jednotek a jejich aplikace*.

fikace produktivity jednotlivých výrobních faktorů, kvantifikace vzájemné zaměnitelnosti (substituce) výrobních faktorů, kvantifikace efektů z rozsahu výroby, stanovení optimální struktury výrobních faktorů, měření technického pokroku, určení efektivnosti výrobního procesu.

Od produkční funkce, jako technologického základu produkčního procesu, jsou pak odvozeny funkce nákladová, příjmová a zisková. Předpokladem je maximalizace hodnoty ziskové funkce, což vyžaduje rozhodnutí o optimální alokaci výrobních faktorů pro produkci optimálního mixu výrobků.

Z hlediska teoretického lze model produkce založit na tradiční analýze mezních veličin, která je obsažena ve všech základních českých i zahraničních učebnicích ekonomie (např. Samuelson, Nordhaus, 1995, Nicholson, 2002, Holman, 2002). V tomto příspěvku chceme ukázat, že model produkce může vycházet i z teorie lineárního programování. Nejde přitom o formulaci nového alternativního modelu produkce, ale paradoxně spíše o jeho připomenutí, neboť jde o metodu všeobecně známou. Lineární programování však nenajdeme v současných českých ekonomických učebnicích, a to ani v pokročilejších textech (Soukup, 2003, Soukupová, Macáková, 2009, Fendeková, 2006). Můžeme ovšem sáhnout po učebnicích matematické ekonomie (Allen, 1971, Hušek, Maňas, 1989, Jablonský, Dlouhý, 2004) či po některých učebnicích zahraničních (např. Koutsoyiannis, 1979). Nebo stačí otevřít nějakou z učebnic operačního výzkumu, kde je lineární programování základní metodou optimalizace v manažerských úlohách (Jablonský, 2002). Chybí bohužel vysvětlení o propojení lineárního programování s ekonomickou teorií.

V příspěvku nejprve v druhé části popíšeme a poukážeme na podstatné vlastnosti modelu produkce podle analýzy mezních veličin. To je malé opakování z ekonomických učebnic. Následně si ukážeme v části třetí modely produkce na bázi lineárního programování a jejich vlastnosti. Poté v části čtvrté se pokusíme o srovnání těchto dvou přístupů.

2. Analýza mezních veličin

Poznatky ekonomické teorie vedly ke zformulování apriorních předpokladů o vlastnostech produkční funkce. Tyto předpoklady vytvářejí model ideální produkční jednotky, na které ekonomové zkoumají výrobní proces. Východiska ideálního modelu výrobního procesu jsou natolik obecné, aby co nejvíce postihovaly klíčové vlastnosti mnohotvárné ekonomické praxe. Skutečné firmy se mohou od modelové firmy i výrazně odchylovat. I tehdy lze vycházet z teoretického modelu, vždy však musí následovat analýza toho, jaké předpoklady teorie jsou porušeny a co z toho vyplývá.

Pro zjednodušení se v této části zaměříme pouze na dvoufaktorovou produkční funkci s jedním výstupem, která je tradičně popisována v ekonomických učebnicích:

$$f(y, x_1, x_2) = 0.$$

Smysluplným požadavkem na průběh produkční funkce je, že přírůstek množství určitého výrobního faktoru vyvolá růst celkového produktu. Je nesmyslné, aby manažer rozhodl zvýšit hodnotu výrobního faktoru (vstupu), pokud by to vedlo k poklesu výroby. O přírůstku celkového produktu vyvolaného výrobním faktorem vypovídá mezní produkt, který vyjadřuje změnu výstupu vyvolanou jednotkovou změnou množství jednoho vstupu při nezměněných úrovních ostatních vstupů. Mezní produkt i-tého zdroje zachytíme matematicky jako první derivaci produkční funkce:

$$MP_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Jsou-li výrobní faktory ve výrobním procesu vzájemně zaměnitelné, ideální model předpokládá, že existuje nekonečně mnoho kombinací výrobních faktorů (tedy výrobních technologií), s nimiž je možné vyrobit určitý objem výroby. Grafickým vyjádřením této vlastnosti produkční funkce je izokvanta. Předpokládá se rovněž, že izokvant (úrovní celkového produktu) je nekonečně mnoho. Mezní míra technické substituce *MRTS* je definována jako poměr, ve kterém je možno nahrazovat jeden vstup za druhý při

$$MRTS_{ij} = \frac{MP_i}{MP_j} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial f}{\partial x_j}}, \quad i = 1, 2, ..., n, j = 1, 2, ..., n.$$

Elasticita (pružnost) substituce vyjadřuje obtížnost při nahrazování jednoho vstupu za druhý. Je definována jako:

$$\sigma = \frac{\dfrac{d(x_i / x_j)}{x_i / x_j}}{\dfrac{dMRTS}{MRTS}}.$$

U komplementární produkční funkce nejsou vstupy vzájemně nahraditelné, koeficient pružnosti substituce $\sigma = 0$. V případě dokonale zastupitelných výrobních faktorů pro koeficient pružnosti platí $\sigma = \infty$, neboť je hodnota *dMRTS* nulová.

Produkční funkce má rovněž odpovědět na to, jaký efekt lze očekávat ze zvyšování rozsahu výroby. Výnosy z rozsahu popisují vztah mezi proporcionální změnou výrobních faktorů, tj. při zachování stálého poměru mezi faktory, a změnou produkce. Zvýšíme-li množství všech faktorů λ-krát a výroba se zvýší λ^r-krát, mohou nastat tyto tři případy: konstantní výnosy z rozsahu, rostoucí výnosy z rozsahu, klesající výnosy z rozsahu.

Cílem výrobce je maximalizace zisku. Předpokládejme výrobce jednoho výstupu, na který je potřeba dvou výrobních faktorů. Dále předpokládáme znalost produkční funkce a nákladové funkce:

$$q = f(x_1, x_2),$$
$$C = c_1 x_1 + c_2 x_2 + r,$$

kde c_1 a c_2 jsou jednotkové ceny výrobních faktorů, r jsou fixní náklady. Označme jako p cenu výstupu. Zisk je rozdílem mezi příjmy a náklady, z čehož vyplývá zisková funkce ve tvaru:

$$z(x_1, x_2) = pq - C = p\,f(x_1, x_2) - c_1 x_1 - c_2 x_2 - r\,.$$

Maximalizace zisku je úloha na volný extrém, ve které musí být splněny podmínky prvního řádu:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = p\frac{\partial f}{\partial x_1} - c_1 = 0\,,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = p\frac{\partial f}{\partial x_2} - c_2 = 0\,.$$

Řešení soustavy podmínek prvního řádu je hledaným bodem maxima zisku, jestliže jsou splněny zároveň podmínky druhého řádu:

$$\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{x}_1 \partial \mathrm{x}_1} < 0\,, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_1} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_2} - \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}\right]^2 > 0\,.$$

Z podmínek prvního řádu dostáváme podmínku pro maximalizaci zisku ve tvaru:

$$\frac{p\dfrac{\partial f}{\partial x_1}}{p\dfrac{\partial f}{\partial x_2}} = \frac{c_1}{c_2}\,.$$

Poměr cen c_1/c_2 je zároveň sklonem izonákladové přímky a v bodě dotyku produkční izokvanty proto také platí:

$$\frac{c_1}{c_2} = -\frac{dx_2}{dx_1} = MRTS_{1,2}\,.$$

V bodě maxima zisku se mezní míra technické substituce výrobního faktoru 1 faktorem 2 rovná opačnému poměru cen těchto výrobních faktorů. Tuto podmínku lze rovněž interpretovat tak, že mezní příjmy produktu z výrobních faktorů nakoupených za jednu peněžní jednotku jsou shodné.

3. Lineární programování

Dorfman, Samuelson a Solow (1987) v úvodu své knihy *Lineární programování a ekonomická analýza* konstatovali, že rozvoj lineárního programování patří mezi nejdůležitější pokroky poválečné ekonomické teorie. Ekonomická teorie, která typicky pracovala s nelineárními vztahy, během let válečných a poválečných objevila možnosti nových analytických metod, které vycházejí z lineárních charakteristik ekonomických problémů. Pojmu *programování* je třeba rozumět v původní smyslu, tudíž jako *plánování* ekonomických aktivit.

Lineární programování je důležitým kvantitativním nástrojem ekonomické analýzy a operačního výzkumu. Jedná se o řešení optimalizační úlohy na vázaný extrém, přičemž jak kriteriální (účelová) funkce, tak omezující podmínky jsou lineární. Lineární modely jsou při analýze praktických problémů výrazně častěji používané než modely nelineární, což je dáno především přijatelnou výpočetní náročností a s tím související dostupností programových systémů pro jejich řešení. Použití lineárních modelů má však i svá omezení. Může se totiž ukázat, že vztahy mezi jednotlivými prvky modelovaného systému nejsou lineární. Použití lineárních vazeb je potom zjednodušením reálné situace, které však v některých případech může vést k neadekvátním výsledkům.

Matematicky lze obecný model úlohy lineárního programování formulovat jako soustavu rovnic a nerovnic s kriteriální funkcí o n proměnných:

Maximalizovat

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

za podmínek

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$\dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2,..., n$$

kde proměnné $x_1, x_2, ..., x_n$ označují množství vyrobených výrobků, c_j jsou parametry kriteriální funkce, např. zisk, cena, náklady, b_j jsou kapacity, množství výrobních faktorů, a_{ij} jsou strukturní koeficienty, které vyjadřují spotřebu j-tého výrobního faktoru na i-tý výrobek. Maximalizace kriteriální funkce není na úkor obecnosti, neboť jakoukoli maximalizační úlohu lineárního programování lze transformovat na úlohu minimalizační a naopak.

3.1 Úloha výrobního plánování

Zatímco v ekonomické teorii je lineární programování jakoby na okraji zájmu, v operačním výzkumu je naopak lineární programování zcela zásadní analytickou metodou (Jablonský, 2002). Nejblíže je modelu produkce v operačním výzkumu zřejmě tzv. úloha výrobního plánování či kapacitní úloha. V tomto modelu vycházíme z detailního popisu technologie produkčního procesu, přičemž předpokládáme, že kapacity výrobních faktorů jsou omezené. Pokud by byla kapacita u některého z faktorů neomezená, nemá smysl tento výrobní faktor v modelu produkce vůbec uvažovat. Optimální rozhodnutí spočívá ve výběru jedné z alternativ (jednoho z přípustných řešení) tak, aby navržený výrobní program (plán) maximalizoval hodnotu kriteriální funkce.

Pro názornost si úlohu výrobního plánování ilustrujeme na zjednodušeném modelu výroby (Fiala, Dlouhý, 2006). Jsou zadány kapacity tří zdrojů: práce (600 hod.), strojový čas (1200 hod.) a materiál (800 kg). Dostupné technologie umožňují výrobu tří druhů výrobků V_1, V_2, V_3. Máme určit výrobní program tak, aby celkový zisk byl maximální. Základní údaje jsou uvedeny v tabulce č. 1.

Tabulka 1

Úloha výrobního plánování

Zdroj	Spotřeba zdroje na jeden výrobek			Množství zdroje
	V_1	V_2	V_3	
Práce (hod.)	2	1	3	600
Strojový čas (hod.)	1	1	2	1200
Materiál (kg)	2	2	1	800
Zisk (Kč)	20	25	30	

Formulujeme matematický model problému. Po zavedení proměnných x_1, x_2, x_3, které označují množství jednotlivých výrobků, dostáváme následující úlohu lineárního programování:

Maximalizovat

$$20\,x_1 + 25\,x_2 + 30\,x_3$$

za podmínek

$$2\,x_1 + x_2 + 3\,x_3 \leq 600$$

$$x_1 + x_2 + 2\,x_3 \leq 1200$$

$$2\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 \leq 800$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$$

Řešení úlohy získáme pomocí vhodného programového produktu pro řešení úloh lineárního programování (řešit úlohu umí i tabulkový kalkulátor *MS Excel*). Program by měl nabídnout následující výsledky:

Výrobní program, tedy co a v jakém množství vyrábět. Tato informace je skryta ve vektoru řešení **x**, z kterého ve výše uvedeném příkladu plyne, že výrobek V_1 se vyrábět nebude, výrobek V_2 se bude vyrábět ve výši 360 kusů a V_3 v množství 80 kusů.

Hodnotu kriteriální (účelové) funkce, která vyjadřuje zisk, tržby, rozsah produkce, či náklady. V našem příkladě je maximální zisk 11 400 Kč.

Využití zdrojů, které získáme z vektoru přídatných proměnných. U některých zdrojů dojde k plnému využití kapacit, v tom případě jde o zdroje, které zamezují zvýšení produkce (v příkladě jde o pracovní sílu a materiál). U některých zdrojů naopak odhalíme nevyužité kapacity, o kterých je nutno rozhodnout jak je efektivně využít (prodej, pronájem, změna výrobního programu). V příkladě jsme odhalili nadbytečnou kapacitu strojového času (680 hodin), který může být využit jiným způsobem.

Stínové ceny, jejichž hodnoty udávají o kolik se zvýší (případně sníží) hodnota kriteriální funkce, jestliže se zvýší (sníží) disponibilní množství daného výrobního faktoru o jednotku. V příkladě je vektor stínových cen (7, 0, 9). Interpretace je následující, pracovní síla je využita na plnou kapacitu a jedna hodina navíc by umožnila zvýšit produkci, což by zvýšilo hodnotu zisku o 7 Kč. Hodina strojového času nic nepřinese, neboť už při současné kapacitě je strojového času nadbytek. Proto je stínová cena u výrobních faktorů, které nejsou plně využity vždy nulová. Pokud snížíme kapacitu materiálu o 1 kg, dojde ke snížení zisku o 9 Kč. Interpretace stínových cen je analogií Lagrangeových multiplikátorů.

Stínové ceny představují ocenění kapacit, obecněji řečeno, ocenění podmínek vyjádřených omezeními. Toto ocenění podmínek úlohy je objektivní, avšak relativní, a sice vzhledem ke zvolené kriteriální funkci a k výchozím podmínkám problému. To znamená, že změnou hodnotícího kritéria, popř. výchozích podmínek se mění i stínové ceny (na rozdíl od cen v kriteriální funkci). Zatímco tržní ceny se týkají všech výrobců (všichni platí a prodávají za stejné ceny), stínová cena se týká pouze individuálního výrobce (každý má jinou technologii). Stínové ceny jsou cenami marginálními, neboť udávají, jak se změní optimální hodnota kriteriální funkce při změně výchozích podmínek o jednotku. Stínové ceny jsou maximální ceny, za které může podnik příslušné kapacity nakupovat (najímat), resp. minimální ceny, za které může ještě tyto kapacity prodávat (pronajímat), aby to nebylo pro podnik ztrátové. Všimněte si, že toto ocenění strojového času stínovou cenou nesouvisí s tržní cenou. Stínové ceny jsou zvláštním druhem cen, které nenajdeme napsané na regálech v obchodních domech.

Redukované ceny, které u nevyráběných výrobků vyjadřují o kolik by se snížila hodnota kriteriální funkce, kdybychom vyrobili jeden výrobek. V příkladě je vektor redukovaných cen (12, 0, 0), což nalezneme v řádce z ve sloupcích strukturních proměnných. Vyrobením deseti výrobků V_1 bychom omezili zdroje dostupné pro ostatní (efektivnější) výrobky, což by v konečném důsledku znamenalo zmenšení zisku o 10 x 12 Kč = 120 Kč. Redukovanou cenu lze též interpretovat tak, že první výrobek by se začal vyrábět, pokud by se jeho zisk zvýšil o nejméně 12 Kč. U vyráběných výrobků jsou redukované ceny rovny nule.

*Alternativní výrobní program***.** Pokud redukovaná cena u nevyráběného výrobku je rovna nule, znamená to, že existuje i jiný, alternativní výrobní program, který dosahuje stejnou hodnotu kriteriální funkce. V našem příkladě tento případ nenastává, jde tedy o jediné optimální řešení (jedinečný výrobní program).

Všimneme si, že lineární programování se příliš nezabývá rozlišováním produkční, nákladové, příjmové a ziskové funkce. Stačí prohlásit, že koeficienty kriteriální funkce reprezentují ceny výrobků a maximalizace zisku se změní na maximalizaci tržeb. Mnohem důležitější je, že lineární programování umožňuje poměrně flexibilní formulaci dalších podmínek produkce, které by byly velmi těžko vyjádřitelné pomocí tradiční teorie produkce, která je založena na analýze mezních veličin. Uvedeme zde některé z častých případů.

Úloha s polotovary. Předpokládejme, že první výrobek je samostatně prodejný, zároveň je však „polotovar“ (součást, díl), který se spotřebuje při výrobě druhého výrobku. Příkladem takové situace může být například počítačová klávesnice, která se prodává jak samostatně, tak jako součást počítačové sestavy. V našem příkladě je třeba zajistit, že polotovarů je vyrobeno dostatečně, neboť nelze vyrábět druhý výrobek, když nevyrábíme první výrobek. To lze vyřešit jednoduchým omezením, v němž množství prvního výrobku vystupuje jako kapacita:

$$x_2 \leq x_1.$$

Zároveň je však nutno odečíst od kriteriální funkce zisk z těch výrobků V_1, které byly spotřebovány ve formě polotovarů, tudíž nebyly prodány. Kriteriální funkce má po této úpravě tvar:

$$20\,(x_1 - x_2) + 25\,x_2 + 30\,x_3.$$

Omezení lze dále modifikovat, pokud je první výrobek polotovarem i pro výrobek třetí, přičemž pro výrobu V_3 jsou potřeba čtyři kusy V_1. Omezení a kriteriální funkce mají potom tvar:

$$x_2 + 4\,x_3 \leq x_1 \text{ a } 20\,(x_1 - x_2 - 4\,x_3) + 25\,x_2 + 30x_3\,.$$

Horní a dolní meze. Častým omezením v úlohách lineárního programování též je, že počet výrobků se může pohybovat pouze ve vymezeném intervalu. Jednak z již uzavřených smluv může plynout, že je třeba vyrobit nejméně 10 kusů výrobku V_3, jednak prodejní oddělení zjistilo, že na trhu je možné prodat maximálně 100 kusů výrobků V_3, což může být chápáno jako „kapacita“ trhu nebo jako důsledek určité státní regulace. Dané podmínky vyjádříme dvojicí omezení:

$$10 \leq x_3 \text{ a } x_3 \leq 100.$$

Požadavky na strukturu výroby. Předpokládejme, že Evropská unie požaduje, že od tohoto roku musí nejméně 40 % produkce splňovat nové, přísnější ekologické normy. V našem příkladě splňuje tyto nové normy pouze výrobek V_3. Danou podmínku formulujeme:

$$0{,}40\,(x_1 + x_2 + x_3) \leq x_3.$$

Při využití lineárního programování v praxi se lze setkat z dalšími, velmi různorodými omezeními. Rozšiřování modelu o další předpoklady, pokud je lze vyjádřit ve formě lineárních omezení, je poměrně snadné. Výpočetně jsou úlohy zvládnutelné i při zavedení limitovaného počtu binárních či celočíselných proměnných a určitých typů nelineárních vztahů.

3.2 Analýza aktivit

Analýza aktivit je model produkce na bázi lineárního programování, který formuloval Koopmans (1951). Předpokládejme, že výrobní proces lze realizovat různými aktivitami, které představují dostupné technologie. Vytvoříme si tak seznam o *n* aktivitách. Celkem existuje *m* komodit, které se při realizaci určité aktivity spotřebovávají nebo vyrábějí. Technologický proces *j*-té aktivity charakterizují technologické koeficienty a_{ij}. V případě, že koeficient $a_{ij} < 0$, vstupuje *i*-tá komodita do *j*-té aktivity jako výrobní faktor, a to v absolutním množství a_{ij}. Výsledkem aktivity jsou komodity, pro které platí $a_{ij} > 0$. Zbývá ještě alternativa $a_{ij} = 0$, což označuje komodity, které se při dané aktivitě nevyrábějí ani nespotřebovávají. Z koeficientů a_{ij} sestavíme matici technologií **A** s m řádky a n sloupci. Sloupce reprezentují jednotlivé aktivity a jejich technologie, řádky charakterizují jednotlivé komodity:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Různé produkční možnosti jsou dány úrovněmi realizace jednotlivých aktivit x_j. O hodnotách x_j předpokládáme jejich nezápornost, neboť záporné hodnoty by nedávaly smysl, a spojitost, tj. aktivity lze uskutečnit na jakékoli úrovni. Pro aktivity proto platí jednoduché omezení $x_j \geq 0$ pro všechna $j = 1, 2,\dots, n$. Ze spojitosti úrovní aktivit automaticky vyplývá neomezená dělitelnost komodit.

Množství i-té komodity označíme y_i. Po realizaci výrobního procesu, který se skládá z různých aktivit, je hodnota y_i dána vzorcem:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Proměnná y_i nabývá kladných hodnot, pokud je i-tá komodita finálním produktem výrobního procesu. Jestliže by u finálního produktu platila rovnost $y_i = 0$, nejednalo by se o efektivní produkt z hlediska jeho nákladů a tomu odpovídajících užitků. V opačném případě, když i-tá komodita slouží jako výrobní faktor, nabývá hodnota y_i záporných hodnot. Opět nulová hodnota značí přebytečnost i-tého primárního faktoru, neboť se při výrobě nevyužívá. Poslední alternativou je, že se i-tá komodita vyrábí v jedné aktivitě proto, aby umožnila výrobu dalších komodit v jiné aktivitě. Z toho vyplývá, že $y_i = 0$, neboť hodnota vyšší než nula by znamenala přebytečnou výrobu. Celkem tedy rozeznáváme tři druhy komodit: primární faktory, pro které platí $y_i \leq 0$, meziprodukty, pro které platí $y_i = 0$, finální produkty, pro které platí $y_i \geq 0$.

Jelikož předpokládáme omezenost alespoň některých primárních faktorů, je nutno ještě přidat omezení $y_i \geq b_i$, kde b_i je záporné, což plyne z definice primárních faktorů (spotřebu značíme záporně). Pro primární faktor dostupný v neomezeném množství by platilo $b = -\infty$. Výše definovaný produkční proces lze zachytit produkční funkcí ve tvaru:

$$f(y_1, y_2, \dots, y_m) = 0.$$

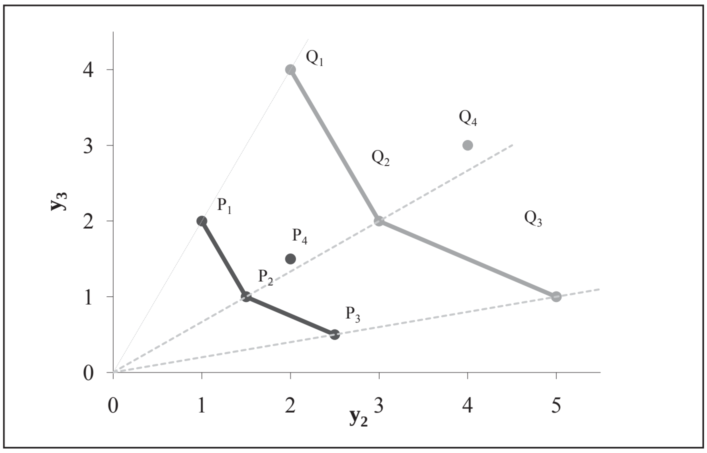
Přirozeným cílem je maximalizovat užitek z finálních produktů. Naším záměrem však bude pouze popsat množinu produkčních možností bez výběru nějaké optimální varianty produkce. Pro názornost si konstrukci množiny produkčních možností ukážeme na ilustračním příkladě (Jablonský, Dlouhý, 2004). Mějme k dispozici výrobní technologie zahrnující čtyři aktivity a tři komodity. První komodita je finálním produktem, další dvě komodity jsou primárními faktory. Dostupné technologie popisuje matice **A,** kterou jsme předtím upravili tak, aby výstupem každé aktivity byla právě jedna jednotka finálního produktu. Matice má čtyři sloupce (aktivity) a tři řádky (komodity).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & -2 \\ -2 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Produkční možnosti znázorníme na obrázku č. 1, jehož osy udávají spotřebu primárních faktorů (y_2, y_3). Pro větší pohodlnost budeme na grafu spotřebu faktorů uvádět v kladných hodnotách. Body P_1 až P_4 reprezentují spotřebu faktorů v jednotlivých aktivitách. Protože je dovoleno aktivity vzájemně kombinovat, je též jakýkoli bod ve čtyřúhelníku $P_1P_2P_3P_4$ možnou alternativou, jak vyrobit jednu jednotku finálního produktu. Některé možnosti nemohou být technicky efektivní, neboť spotřebovávají nadbytečné množství výrobních faktorů. Zahrnutí aktivity 4 do výrobního programu je neefektivní, protože takový výrobní program bude vždy spotřebovávat více zdrojů, než výrobní program nacházející se na lomené čáře P_1-P_2-P_3. Tato lomená čára odpovídá izokvantě technicky efektivních výrobních programů. Izokvant je také zde nekonečně mnoho, pro $y_1 = 2$ dostaneme izokvantu Q_1-Q_2-Q_3. Možné úrovně jednotlivých aktivit jsou zobrazeny polopřímkami $0P_1$, $0P_2$ a $0P_3$. Konvexní útvar daný sousedními polopřímkami nazveme kuželem. Množina produkčních možností je v tomto případě dána dvěma kužely. Pro každý kužel je charakteristická jiná hodnota mezní míry technické substituce.

Obrázek 1

Produkční funkce na základě analýzy aktivit



3.3 Analýza obalu dat

S analýzou aktivit má mnoho společného i analýza obalu dat (data envelopment analysis), která se zabývá hodnocením technické efektivnosti produkčních jednotek (např. Jablonský, Dlouhý, 2004, Dlouhý, Jablonský, Novosádová, 2007). Rozdíl v obou metodách spočívá v tom, že v analýze obalu dat si místo jednotlivých technologií v matici **A** představíme jednotlivé produkční jednotky, jejichž technickou efektivnost hodnotíme. Produkční jednotky ležící na izokvantě jsou technicky efektivní, jednotky nad izokvantou jsou technicky neefektivní a jejich neefektivnost lze měřit vzdáleností od izokvanty. První model analýzy obalu dat formulovali v roce 1978 Charnes, Cooper a Rhodes a podle počátečních písmen jejich jmen je tento model označován jako tzv. CCR model (Charnes, Cooper, Rhodes, 1978). CCR model předpokládá konstantní výnosy z rozsahu. Předpokládejme, že máme n produkčních jednotek a každá z nich pro výrobu potřebuje r druhů vstupů a vytváří s výstupů. Označme jako $\mathbf{X}(r;n)$ matici vstupů (r-řádků, jeden pro každý vstup, n-sloupců, jeden pro každou jednotku) a jako $\mathbf{Y}(s,n)$ matici výstupů (s-řádků, jeden řádek pro každý výstup, n-sloupců, jeden sloupec pro každou jednotku).

Základním východiskem analýzy obalu dat je redukce většího počtu vstupů a většího počtu výstupů na jeden „virtuální" vstup a jeden „virtuální" výstup pomocí vah, které jsou řešením modelu. Poměr mezi virtuálním výstupem a virtuálním vstupem určuje míru efektivnosti. V úloze jsou hledány váhy, které maximalizují efektivnost zkoumané jednotky R_0. Produkční jednotka sama nastavuje váhy tak, aby jí co nejvíce váhy vyhovovaly, z čehož vyplývá, že výsledkem je optimistický odhad efektivnosti dané jednotky. Relativní technická efektivnost produkční jednotky e_0 je dána maximalizací poměru mezi virtuálním výstupem a virtuální vstupem za podmínky, že relativní efektivnost každé jednotky je při daných vahách menší nebo rovna jedné. Žádná produkční jednotka tedy nesmí být efektivní na 120 %. Matematická formulace úlohy vede k úloze lineárního lomeného programování:

$$e_0 = \frac{\sum_{i=1}^{s} u_i y_{i0}}{\sum_{j=1}^{r} v_j x_{j0}} \rightarrow \max$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{s} u_i y_{ih}}{\sum_{j=1}^{r} v_j x_{jh}} \leq 1 \qquad h = 1, 2, \ldots, n$$

$$u_i, v_j \leq 0\ , \mathrm{i} = 1, 2, \ldots, s\ , j = 1, 2, \ldots, r.$$

Výše formulovaná nelineární úloha se převede na úlohu lineárního programování s novými proměnnými (vahami μ a v) , která vznikne pomocí Charnesovy-Cooperovy transformace a má optimální řešení, které je také optimální řešení pro původní úlohu lineárního lomeného programování. Úloha má tvar:

$$\sum_{i=1}^{s} \mu_i y_{i0} \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{r} v_j x_{j0} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{s} \mu_i y_{ih} - \sum_{j=1}^{r} v_{jh} x_{jh} \leq 0, \qquad h = 1, 2,..., n,$$

$$\mu_i,\ v_j \geq 0,\ i = 1, 2,..., s,\ j = 1, 2,..., r.$$

Výše uvedená úloha má tři typy optimálních řešení, které představují efektivní, smíšeně neefektivní a neefektivní produkční jednotky:

- Jestliže je možno nalézt kladné váhy, pro které je relativní efektivnost produkční jednotky e_0 rovna jedné, potom je produkční jednotka R_0 efektivní.
- Jestliže je relativní efektivnost produkční jednotky e_0 rovna jedné, ale jedna z vah je rovna nule, jde o jednotku smíšeně neefektivní, která sice leží na efektivní hranici, ale přesto nepatří mezi efektivní produkční jednotky.
- estliže je relativní efektivnost e_0 menší než jedna, produkční jednotka R_0 je neefektivní. Jednou ze strategií jak dosáhnout efektivnosti je proporcionální redukce vstupů na úroveň e_0 nebo proporcionální zvýšení výstupů $(1/e_0)$-krát.

4. Shrnutí

Po seznámení se dvěma přístupy k modelování a analýze produkce, kterými jsou analýza mezních veličin a lineární programování, přistoupíme ke srovnání těchto dvou přístupů.

Model produkce. Analýza mezních veličin směřuje k vytvoření ideálního, velmi obecného modelu produkce, který poskytuje výklad činnosti podniku a nabízí řadu obecně platných závěrů. Modelem pro analýzu mezních veličin jsou jednoduché výrobní procesy (např. zemědělství) s předpokladem spojitých změn a možnosti substituce. Vztahy mezi veličinami jsou v modelu obvykle zachyceny jako nelineární. Naopak pro lineární programování je základem detailní vymezení technologie, model zdůrazňuje technickou stránku výroby. Modelem pro lineární programování je moderní průmyslový podnik se složitě strukturovaným výrobním procesem. Vztahy mezi veličinami jsou v modelu zachyceny jako lineární, i když určité nelineární vazby jsou rovněž možné. Zajímavou teoretickou otázkou je, i když mimo toto srovnání, jaký model produkce se ukáže v budoucnu vhodnější pro oblasti služeb a informačních technologií, které z národního hospodářství postupně vytlačují tradiční odvětví zemědělství a průmyslu.

Výrobní faktory. Podle analýzy mezních veličin jsou výrobní faktory k dispozici v neomezeném množství. Jde o zásadní odlišnost od modelu lineárního programování, kde výrobní faktory (vždy alespoň některé) jsou k dispozici v určitém omezeném množství, které je dáno hodnotami b_i. Bez existence omezení by úloha na maximalizaci zisku vedla k nekonečnému zisku. Lze jistě namítnout, že podmínka absolutní dostupnosti všech faktorů je v ekonomické teorii pochopitelná, avšak v ekonomické praxi je stěží udržitelná. Určité uvolnění podmínek a přiblížení analýze mezních veličin můžeme dosáhnout tím, že model zformulujeme tak, že existuje rozpočtové omezení C, které firma může použít na nákup výrobních faktorů. Firma sama tedy nastavuje hodnoty pravých stran omezení b_i, takže může stejně jako v modelu analýzy mezních veličin docházet k substituci mezi výrobními faktory.

Stanovení optimálního výrobního programu. V analýze mezních veličin se rozhodnutí o výrobním programu týká optimálního substitučního poměru mezi výrobními faktory z nekonečného počtu alternativ produkce. Optimum nastává, když mezní příjmy z výrobních faktorů nakoupených za jednu peněžní jednotku jsou shodné. V lineárním programování spočívá stanovení optimálního výrobního programu ve výběru z konečného počtu dostupných technologií (aktivit). Jelikož je však úroveň aktivit spojitá, jeví se také změna v množství spotřebovaných faktorů a v množství výstupů spojitě.

Výpočetní složitost. I když výpočetní složitost vlastně není součástí modelu, je zřejmé, že zásadně ovlivňuje využití toho či onoho modelového přístupu, ať už ve výuce či v praxi. Analýza mezních veličin obvykle vychází ze základních znalostí o nalezení volného a vázaného extrému (derivace a Lagrangeova metoda). Rozšiřování základního modelu o další předpoklady je však z hlediska praktických výpočtů velmi rychle poměrně složité. Pochopení lineárního programování je poněkud náročnější, avšak další rozšiřování modelu o doplňující předpoklady ve formě lineárních omezení je již poměrně snadné.

Teorie produkce, se kterou se každý student ekonomického směru seznámí v učebnicích ekonomie, je založena na analýze mezních veličin. Dovolujeme si tvrdit, že rovnocennou teoretickou alternativou pro model produkce je využití lineárního programování. Přirozeně, že každý přístup má své výhody i nevýhody. Pokud přepokládáme možnost spojitých změn a dokonalou zaměnitelnost (substituci) ve výrobě, bude zřejmě vhodnější zvolit analýzu mezních veličin. V případě, že výrobní proces chápeme jako rozhodnutí mezi určitým konečným počtem technologických aktivit či procesů při omezeném množství zdrojů, pak bychom měli dát přednost lineárnímu programování. Nic však nebrání tomu využít obou přístupů tak, aby se vhodně doplňovaly. Bylo by to jistě obohacením výuky, které by rozšířilo znalosti studentů a navzájem je propojilo.

Je podle mne velkým paradoxem, že mnozí budoucí ekonomové se s lineárním programováním seznámí během svého studia (například v kurzech operačního výzkumu), nedozví se však nic o tom, že jde o matematickou metodu, která nemusí sloužit jen pro řešení úloh z managementu, ale jde též o metodu ekonomické analýzy. Alespoň v pokročilejších ekonomických kurzech by stálo za to seznámit studenty s modely na bázi lineárního programování.

Literatura

ALLEN, R. G. D. 1971. *Matematická ekonomie*. Praha : Academia, 1971.

DLOUHÝ, M.; JABLONSKÝ, J.; NOVOSÁDOVÁ, I. 2007. Využití analýzy obalu dat pro hodnocení efektivnosti českých nemocnic. *Politická ekonomie*. 2007, č. 1, s. 60–71. ISSN 0032-3233.

DORFMAN, R.; SAMUELSON, P. A.; SOLOW, R. M. 1987. *Linear programming and economic analysis*. New York : Dover Publications, 1987 (reprint původního vydání z roku 1958).

FENDEKOVÁ, E. 2006. *Oligopoly a regulované monopoly*. Bratislava : Iura Edition, 2006.

FIALA, P.; DLOUHÝ, M. 2006. *Základy kvantitativní ekonomie a ekonomické analýzy.* Praha : Vysoká škola ekonomická v Praze, 2006.

HOLMAN, R. 2002. *Mikroekonomie – středně pokročilý kurz*. Praha : C. H. Beck, 2002.

HUŠEK, R.; MAŇAS, M. 1989. *Matematické modely v ekonomii*. Praha : SNTL, 1989.

CHARNES, A.; COOPER, W. W.; RHODES, E. 1978. Measuring the inefficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*. 1978, no. 2, s. 429–444.

JABLONSKÝ, J. 2002. *Operační výzkum: kvantitativní modely pro ekonomické rozhodování*. Praha : Professional Publishing, 2002.

JABLONSKÝ, J.; DLOUHÝ, M. 2004. *Modely hodnocení efektivnosti produkčních jednotek*. Praha : Professional Publishing, 2004.

KOOPMANS, T. C. (ed.). 1951. *Activity Analysis of Production and Allocation*. New York : John Wiley and Sons, 1951.

KOUTSOYIANNIS, A. 1979. *Modern Microeconomics*. 2. vyd. London : Macmillan Press, 1979.

NICHOLSON, W. 2002. *Microeconomic theory: basic principles and extensions*. 8. Ed. South-Western, 2002.

SAMUELSON, P. A.; NORDHAUS, W. D. 1995. *Economics*. 15. Ed. New York : McGraw-Hill, 1995.

SOUKUP, J. 2003. *Mikroekonomická analýza*. Slaný : Melandrium, 2003.

SOUKUPOVÁ, J.; MACÁKOVÁ, L. 2009. *Teorie firmy.* Slaný : Melandrium, 2009.

ALTERNATIVE PRODUCTION MODELS IN ECONOMIC THEORY

Abstract: In the paper, marginal analysis and linear programming are described and then compared as two independent theoretical approaches to production theory. Although marginal analysis dominates economic literature, we argue that linear programming is an equivalent theory with some advantages and, of course, some disadvantages in comparison to marginal analysis. Marginal analysis will be a more suitable choice if we assume continuous changes and perfect substitution in production and unlimited capacities of production factors. On the other hand, linear programming describes production as a combination of a finite number of available technologies with limited capacities of production factors. However, the best choice is likely to combine both the approaches to complement one another. It is a paradox that many economic students know linear programming from operational research or management science courses, but they have no notion that linear programming is also one of the basic tools of quantitative economic analysis.

Keywords: production theory, production function, linear programming, marginal analysis

JEL Classification: C02, D24