

---

## APLIKACE FIGARCH A EWMA MODELŮ NA BURZOVNÍ INDEXY PX A BUX

Zdeněk Štolc\*

### Úvod

U finančních časových řad lze pozorovat jev, kdy i velmi vzdálené náhodné veličiny mohou být relativně silně závislé. Toto chování stochastického procesu, generujícího danou finanční časovou řadu, je možné modelovat pomocí zobecněných modelů ARIMA, tzv. modely ARFIMA, které nemají žádné omezení na řád diferencování  $d$  pro dosažení stacionarity. U těchto modelů je charakteristické, že hodnoty autokorelační funkce klesají s rostoucím zpožděním hyperbolicky narozdíl od exponenciálního poklesu u stacionárních procesů ARMA. Tuto třídu s dlouhou pamětí frakcionálně integrovaných procesů navrhl Granger (1980) a lze je zapsat ve tvaru (Trešl, 1999)  $\Delta^d y_t = (1 - B)^d y_t = \varepsilon_t$ , kde  $\{\varepsilon_t\}$  je proces bílého šumu a  $d$  je frakcionální parametr nabývající v tomto případě libovolné reálné hodnoty. Frakcionální diferenci potom vyjádříme jako  $\Delta^d = (1 - B)^d$ .

Pomocí modelů ARFIMA se modeluje podmíněná střední hodnota, ovšem např. v práci Mandelbrota (1963) bylo prozkoumáno, že výnosy aktiv v průběhu času nejsou nezávislé a dané procesy výnosů mají sklon projevit se v dočasných šocích do volatility, což je předmětem zájmu prvotních modelů podmíněného rozptylu ARCH, resp. GARCH. Analogií modelování dlouhodobých závislostí v podmíněné střední hodnotě jsou třídy integrovaných GARCH modelů (IGARCH) pro modelování podmíněného rozptylu, tj. proces integrovaný v rozptylu, přičemž pro popis dlouhé paměti v autokorelaci výnosů finančních aktiv se použije frakcionálně integrovaný model GARCH (FIGARCH). Tyto modely mají za cíl flexibilněji popsat proces podmíněného rozptylu umožňující lépe vysvětlit závislosti ve finančních časových řadách, což má za následek dosahování přesnějších výsledků u kalkulace Value at Risk – míry rizika, v jejíž kalkulaci má zásadní postavení modelování rozptylu, resp. kovariancí. Cílem tohoto článku není podat vyčerpávající přehled modelů podmíněné heteroskedasticity, nýbrž se zabývat otázkou, zdali je při stanovení míry Value at Risk možné opustit „rigidní“ doporučení metodologie RiskMetrics při výběru modelu podmíněného rozptylu EWMA a s ohledem na charakter časové řady použít např. model s dlouhou pamětí.

---

\* Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky (xstoz04@vse.cz).

# 1. Model FIGARCH

Model FIGARCH kombinuje frakcionálně integrovaný proces pro střední hodnotu s procesem GARCH pro podmíněný rozptyl. Při popisu FIGARCH procesu vyjdeme z vhodného zápisu pro podmíněně heteroskedastický proces náhodné složky  $\{u_t\}$  ve tvaru

$$u_t = \sqrt{h_t} \varepsilon_t, \quad (1)$$

kde  $\{\varepsilon_t\}$  je iid proces s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem.  $h_t$  značí příslušnou nezápornou měřitelnou funkci s informační množinou  $\Omega_{t-1}$  do času  $(t-1)$ , tj.  $h_t \equiv h_t(\Omega_{t-1})$ . U modelů podmíněné heteroskedasticity jde tedy o modelování funkce  $h_t$ . Pokud není splněna podmínka stacionarity v kovariancích (viz Baillie et al., 1996), potom je proces GARCH  $(p,q)$  integrovaný v rozptylu a označuje se jako IGARCH  $(p,q)$ , který lze obecně zapsat ve tvaru

$$\phi(L)(1-L)u_t^2 = \omega + [1 - \beta(L)](u_t^2 - h_t), \quad (2)$$

kde  $L$  je operátor zpoždění. Z modelu (2) lze následně získat požadovaný model FIGARCH nahrazením  $(1-L)$  frakcionální diferencí  $(1-L)^d$  s binomickým rozvojem (Hosking, 1981), kde  $0 < d < 1$ . Výsledný model FIGARCH  $(p,d,q)$  pro proces  $\{u_t\}$  je možné zapsat ve tvaru

$$\phi(L)(1-L)^d u_t^2 = \omega + [1 - \beta(L)]v_t, \quad (3)$$

kde  $v_t = u_t^2 - h_t$ . Pro sledování efektu šoku v podobě  $u_t$  promítajícího se do podmíněného rozptylu  $h_{t+j}$  se formule (3) následně upravuje (Baillie et al., 1996) do tvaru ARCH  $(\infty)$ . Použitím Sterlingovy formule lze poté pro velké  $j$  tvrdit, že tento efekt hyperbolicky klesá v případě rostoucího  $j$ .

Odhad parametrů  $\hat{\theta} = (\omega, d, \beta_1, \dots, \beta_p, \phi_1, \dots, \phi_q)^T$  modelu FIGARCH  $(p,d,q)$  se při předpokladu podmíněné normality procesu  $\{u_t\}$  provádí metodou maximální věrohodnosti. Obecně lze model finanční časové řady zapsat ve tvaru

$$y_t = G(\mathbf{x}_t, \hat{\theta}) + u_t, \quad (4)$$

kde  $G(\mathbf{x}_t, \hat{\theta})$  je deterministická část modelu mající obecně tvar dvakrát diferencovatelné nelineární funkce s parametry  $\hat{\theta}$ . Za předpokladu existence funkce hustoty pravděpodobnosti  $f(\cdot, \theta)$  s vektorem  $\theta = (\hat{\theta}^T, \hat{\theta}^T)^T$  pro nezávislý proces  $\{\varepsilon_t\}$ , získáme maximalizací věrohodnostní funkce (viz Baillie et al., 1996) konzistentní

a asymptoticky normální odhady parametrů modelu. Jelikož v praxi není u finančních časových řad předpoklad normality reálný, využívá se pro odhad parametrů také metoda kvazi-maximální věrohodnosti, poskytující při splnění podmínek (Bollerslev, 1992) rovněž konzistentní a asymptoticky normální odhady parametrů.

## 2. Value at Risk a model EWMA

Value at Risk (VaR) jako míru rizika daného instrumentu či portfolia<sup>1</sup> definujeme jako maximální potencionální ztrátu z finančního instrumentu, která nastane s danou pravděpodobností za daný časový horizont. Nechť  $Z$  je ztráta nastávající za časový horizont  $\Delta t$  s pravděpodobností  $(1 - \alpha)\%$ , kde  $\alpha \in (0,1)$ . Potom se Value at Risk vyjádří jako kvantil ztráty v hodnotě daného instrumentu  $q_{1-\alpha}(Z)$ ,

$$\text{VaR}_{\alpha, t+\Delta t} = \inf \{q_{1-\alpha}(Z) \mid P(Z \leq q_{1-\alpha}(Z)) > 1 - \alpha\}. \quad (5)$$

Při kvantifikaci Value at Risk je důležitý předpoklad týkající se změn hodnot daného instrumentu. I když dle empirických výzkumů, např. v práci Mandelbrota (1963) bylo prokázáno, že rozdělení změn hodnot instrumentu je více špičaté (tzv. leptokurtické) a má tlustší konce, pracuje se z důvodu zjednodušení u relativně nejběžnější metody výpočtu Value at Risk, u varianční-kovarianční metody<sup>2</sup>, se silným předpokladem normality rozdělení.

Metodologie RiskMetrics modeluje podmíněný rozptyl  $h_t$  pomocí modelu EWMA (Exponentially Weighted Moving Average). Tento přístup modelování podmíněného rozptylu je založen na myšlence, že nejnovějšímu pozorování je přiřazena největší váha. Označíme-li  $0 < \lambda < 1$  jako tzv. tlumící faktor reprezentující relativní váhy u daného pozorování, tj. značí míru klesání důležitosti pozorování při postupování zpátky v čase, můžeme vyjádřit podmíněný rozptyl dle modelu EWMA v čase  $t$  jako (RiskMetrics, 1996)

$$h_{t,t-1} = \lambda h_{t-1} + (1 - \lambda) y_{t-1}^2, \quad (6)$$

kdy RiskMetrics doporučuje volit pro jednodenní pozorování  $\lambda = 0,94$ . Formule pro výpočet Value at Risk pomocí varianční-kovarianční metody má potom podobu (Jorion, 1997)

$$\text{VaR}_{\alpha, \text{relativní}} = -q_{\alpha}^{-1} \sqrt{h_t} W, \quad (7)$$

kde  $W$  je počáteční investovaná hodnota do daného instrumentu. Pokud předpokládáme Studentovo  $t$ -rozdělení s  $\nu$  stupni volnosti, které lépe reflektuje charakter výnosů finanční časové řady, transformuje se formule (7) do podoby

1 V tomto článku se nebudeme zabývat portfoliem, a tudíž ani problematikou modelování kovariancí.

2 S předpokladem normality se pracuje i u metody Monte Carlo.

$$\text{VaR}_{\alpha, \text{relativní}} = -q_{\alpha(s)}^{-1} \sqrt{\frac{\nu-2}{\nu}} \sqrt{h_t} W. \quad (8)$$

### 3. Aplikace modelů FIGARCH a EWMA

#### 3.1 Odhad parametrů modelů

Data jsou denní časové řady historických cen indexů PX a BUX v období od 6. 9. 2004 do 24. 2. 2011, tedy o  $T = 1627$  pozorování. Dané časové řady jsou na 5% hladině významnosti testovány pomocí rozšířeného Dickeyova-Fullerova testu (ADF test). Výsledky ADF testu ukazuje tabulka 1.

**Tabulka 1**

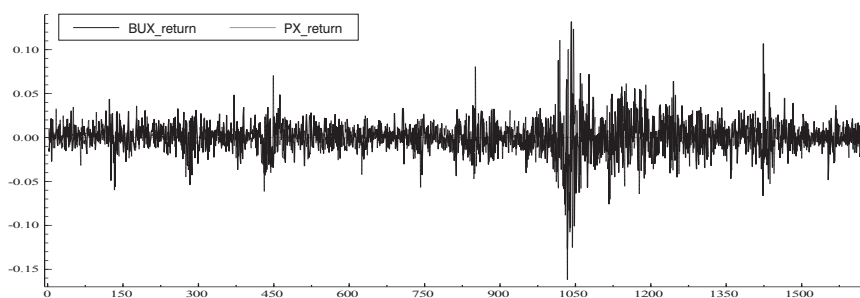
**Výsledky ADF testu pro řady BUX a PX**

	PX	BUX
testová statistika ADF testu	-1,778	-2,191
kritická hodnota při 5% hl.v.	-2,864	-2,864

Na 5% hladině významnosti není pomocí ADF testu zamítnuta nulová hypotéza nestacionarity sledovaných časových řad historických cen. Dané časové řady jsou převedeny na první difference logaritmů, tj. pracujeme s logaritmickou mírou výnosu ve tvaru  $y_t = \log(P_t) - \log(P_{t-1})$   $t = 1, \dots, 1626$ . Obrázek 1 ukazuje průběh takto transformovaných časových řad, které jsou již dle ADF testu shledány jako stacionární.

**Obrázek 1**

**Vývoj logaritmických měr výnosů sledovaných burzovních indexů**



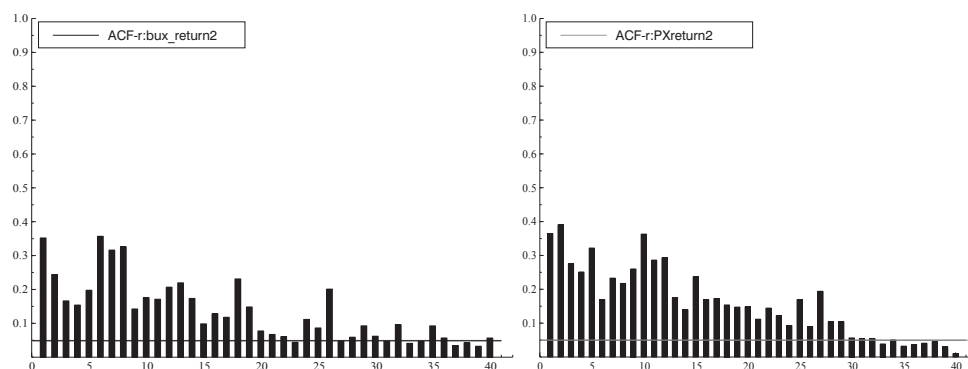
Na 5% hladině významnosti je pomocí Jarqueova-Beraova testu testována nulová hypotéza normality rozdělení nesystematické složky, dle Portmonteau testu nulová hypotéza nepřítomnosti autokorelace nesystematické složky a pomocí ARCH testu nulová hypotéza podmíněné homoskedasticity nesystematické složky. Výsledky testování pro obě řady jsou uvedeny v tabulce 2.

**Tabulka 2**  
**Výsledky testování reziduí**

	BUX	PX
Portmonteau test	$\chi^2(40) = 103,51 [0,00]**$	$\chi^2(40) = 123,59 [0,00]**$
Jarqueův-Beraův test	$\chi^2(2) = 892,59 [0,00]**$	$\chi^2(2) = 2091,3 [0,00]**$
ARCH test	$F(1,1624) = 229,83 [0,00]**$	$F(1,1624) = 249,27 [0,00]**$

V obou případech jsou na dané hladině významnosti všechny nulové hypotézy zamítnuty, a lze tedy konstatovat, že je vhodné použít model podmíněné heteroskedasticity. Jelikož je analyzován model s dlouhou pamětí FIGARCH, je před odhadem příslušných parametrů modelů zobrazena autokorelační funkce procesu volatility a provedena R/S analýza, v tomto případě upravenou pro detekci dlouhé paměti v procesu volatility.

**Obrázek 2**  
**Autokorelační funkce procesu volatility indexu PX a BUX**



Z hyperbolického poklesu autokorelačních funkcí lze odhadovat přítomnost dlouhé paměti v procesech volatility. Výsledek R/S analýzy je uveden v tabulce 3.

**Tabulka 3****Výsledky R/S analýzy pro proces volatility**

	PX	BUX
odhad Hurstova exponentu	0,5639	0,4032

U indexu PX vychází odhad Hurstova exponentu v intervalu  $0,5 < \hat{H} < 1$ , což značí persistenci procesu volatility, a lze tedy usuzovat na přítomnost dlouhé paměti ve volatilitě. V případě indexu BUX je odhad Hurstova exponentu v intervalu  $0 < \hat{H} < 0,5$ , což značí na antipersistentní proces volatility vyznačující se střídáním kladných a záporných hodnot, a tedy existenci střední paměti v procesu volatility. Model FIGARCH by tedy mohl být vhodným nástrojem pro modelování podmíněného rozptylu.

Parametry modelu FIGARCH jsou odhadovány metodou kvazi-maximální věrohodnosti při předpokladu Studentova t-rozdělení s  $\nu$  stupni volnosti<sup>3</sup>. Odhady parametrů modelů za předpokladu Studentova t-rozdělení ukazuje tabulka 4.

**Tabulka 4****Odhady parametrů pro řadu burzovního indexu PX**

parametr	GARCH (1,1)	FIGARCH (1,d,1)
$\omega$	4,717e-006	0,052
	(1,441e-006)	(0,021)
$\beta_1$	0,849	0,664
	(0,019)	(0,077)
$\phi_1$	0,137	0,088
	(0,021)	(0,067)
d	-	0,687
		(0,108)

Statistická významnost jednotlivých parametrů modelu je testována na 5% hladině významnosti, přičemž je zjištěno, že parametr  $\phi_1$  je statisticky nevýznamný, a tudíž není do modelu zahrnut. Úplný model FIGARCH pro burzovní index PX lze zapsat ve tvaru

<sup>3</sup> Pro úplnost je odhadován i model GARCH (1,1).

$$y_t = 100 \log \left( \frac{P_t}{P_{t-1}} \right) = \mu_t + u_t \quad t = 1, 2, \dots, 1626$$

$$u_t = \varepsilon_t \sqrt{h_t} \quad \varepsilon_t | \Omega_{t-1} \sim f_\nu(\varepsilon_t | \Omega_{t-1}), \quad (9)$$

$$= \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\sqrt{\pi(\nu-2)}\Gamma(\nu/2)} \left( 1 + \frac{\varepsilon_t^2}{\nu-2} \right)^{-(\nu+1)/2}$$

$$h_t = 0,052 + 0,664 h_{t-1} + \left[ 1 - 0,664 L - (1-L)^{0,687} \right] u_t^2,$$

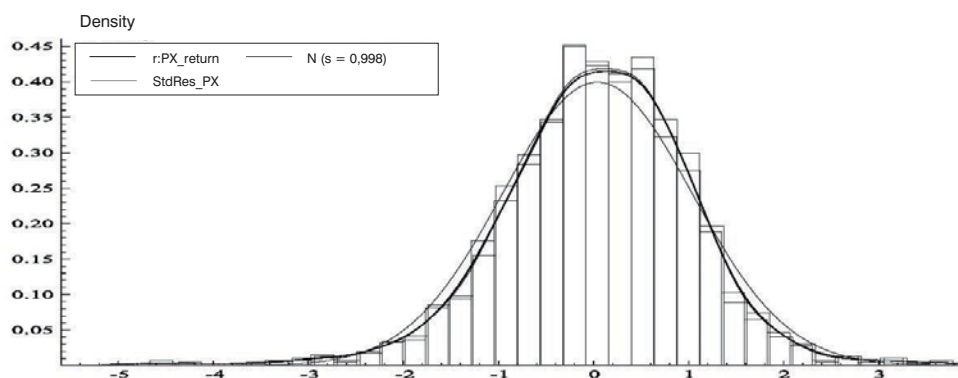
resp. rovnice pro podmíněný rozptyl má v případě modelu GARCH (1,1) tvar

$$h_t = 4,717 \cdot 10^{-6} + 0,137 u_{t-1}^2 + 0,849 h_{t-1}. \quad (10)$$

Obrázek 3 porovnává rozdělení standardizovaných reziduí indexu PX, kdy lze pozorovat, že model FIGARCH lépe vystihuje vyšší špičatost rozdělení než model GARCH. U obou modelů byla pomocí Jarqueova-Beraova testu prokázána nenormalita standardizovaných reziduí.

**Obrázek 3**

**Rozdělení standardizovaných reziduí modelu FIGARCH a GARCH**



Stejně postupujeme i pro index BUX, kdy výsledky jsou znázorněny v tabulce 5.

**Tabulka 5**  
**Odhady parametrů modelů pro index BUX**

parametr	GARCH (1,1)	FIGARCH (1,d,1)
$\omega$	6,872e-006	0,068
	(2,248e-006)	(0,039)
$\beta_1$	0,870	0,652
	(0,021)	(0,181)
$\phi_1$	0,109	0,233
	(0,018)	(0,095)
d	-	0,552
		(0,216)

I v tomto případě není parametr  $\phi_1$  z důvodu jeho statistické nevýznamnosti do modelu FIGARCH zahrnut. Výsledná rovnice charakterizující podmíněný rozptyl má tvar

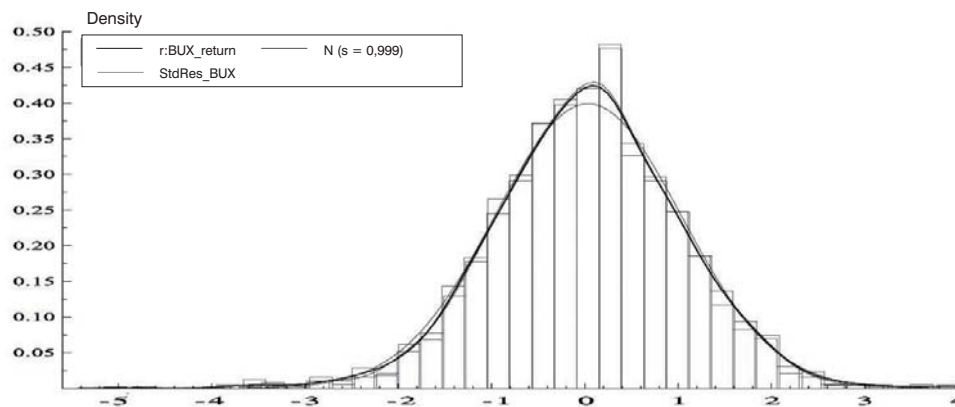
$$h_t = 0,068 + 0,652 h_{t-1} + \left[1 - 0,652 L + (1 - L)^{0,552}\right] u_t^2, \quad (11)$$

resp. v případě modelu GARCH (1,1)

$$h_t = 6,872 \cdot 10^{-6} + 0,109 u_{t-1}^2 + 0,870 h_{t-1}. \quad (12)$$

Z hodnot odhadů parametrů modelu GARCH (1,1) vyplývá, že součet odhadů parametrů  $\beta_1$  a  $\phi_1$  je 0,985 resp. 0,979, což je hodnota velmi blízká jedné, a lze tedy uvažovat o modelu IGARCH (1,1). Hodnota parametru  $\phi_1$  u modelů GARCH je malá a hodnota  $\beta_1$  velká, což znamená, že efekt šoků promítající se do podmíněného rozptylu se ztrácí velmi pomalu. Velikost dopadu šoku  $u_t$  do podmíněného rozptylu  $h_{t+j}$  je potom  $0,14 \cdot 0,85^{j-1}$ , resp.  $0,11 \cdot 0,87^{j-1}$ . Rovněž u indexu BUX je dle odhadnutých modelů volatility znázorněno rozdělení standardizovaných reziduí. I u indexu BUX byla dle Jarqueova-Beraova testu prokázána nenormalita rozdělení standardizovaných reziduí. V tomto případě naopak model GARCH lépe vystihuje vyšší špičatost rozdělení než model FIGARCH.



**Obrázek 4****Rozdělení standardizovaných reziduí modelu FIGARCH a GARCH**

### 3.2 Výpočet Value at Risk

Value at Risk je kalkulován na denní bázi pro 95% a 99% interval spolehlivosti. Při výpočtu VaR uvažujeme dlouhou pozici, kdy držitel dlouhé pozici se obávají poklesu cen a sledují levé spektrum rozdělení cen. S ohledem na analýzu v části 4.1 pracujeme s levými kvantily  $q_\alpha$  Studentova t-rozdělení,  $\alpha$  tedy nabývá hodnot 0,05 a 0,01.

Vhodnost, resp. přesnost jednotlivých modelů volatility pro propočet Value at Risk kvantifikujeme pomocí Kupiecova testu (Kupiec, 1995). Buď  $x$  počet výnosů/ztrát převyšující kalkulovaný VaR a  $T$  je počet pozorování. Pak označme  $\hat{f} = \frac{x}{T}$  jako odhadnutou pravděpodobnost překročení VaR. Testování validity modelu je ekvivalentní k testování nulové hypotézy  $H_0 : f = \alpha$  oproti alternativní hypotéze  $H_1 : f \neq \alpha$ , kde  $\alpha$  značí zvolenou pravděpodobnost. Testová statistika Kupiecova testu nabývá podoby

$$LR_{KUP} = -2\ln\left[(1-\alpha)^{T-x}\alpha^x\right] + 2\ln\left[(1-\hat{f})^{T-x}\hat{f}^x\right] \sim \chi^2(1). \quad (13)$$

Výsledky Kupiecova testu validity modelů FIGARCH, GARCH a EWMA jsou uvedeny v tabulce 6.

**Tabulka 6****Testování modelů pomocí Kupiecova testu**

	$\alpha$ kvantil	model	$f$	LR testová statistika	výstup testu
PX	0,05	FIGARCH	0,03998	3,68276	VHODNÝ
	0,05	GARCH	0,04121	2,80922	VHODNÝ
	0,05	EWMA	0,04859	0,06911	VHODNÝ
	0,01	FIGARCH	0,00984	0,00422	VHODNÝ
	0,01	GARCH	0,00923	0,10125	VHODNÝ
	0,01	EWMA	0,01107	0,18177	VHODNÝ
BUX	0,05	FIGARCH	0,05474	0,74573	VHODNÝ
	0,05	GARCH	0,05597	1,17489	VHODNÝ
	0,05	EWMA	0,06150	4,23213	<b>NEVHODNÝ</b>
	0,01	FIGARCH	0,00677	1,93929	VHODNÝ
	0,01	GARCH	0,00800	0,70887	VHODNÝ
	0,01	EWMA	0,00923	0,10125	VHODNÝ

Dle výsledků Kupiecova testu vyplývá, že při výpočtu Value at Risk jsou modely FIGARCH a GARCH vhodnými nástroji pro modelování podmíněného rozptylu. U indexu BUX byla zamítnuta při kalkulaci 95 % VaR nulová hypotéza validity modelu EWMA, což může signalizovat závěr o ne příliš vhodném přístupu modelování volatility dle „rigidní“ metody RiskMetrics, ale naopak podporuje flexibilnější ekonomický přístup. Na ideji měření času  $\theta$  prvního překročení VaR je založen Kupiecův TUFF test (Kupiec, 1995) s testovou statistikou

$$LR_{TUFF} = -2 \ln \left[ \frac{\alpha(1-\alpha)^{\theta-1}}{\left(\frac{1}{\theta}\right)\left(1-\frac{1}{\theta}\right)^{\theta-1}} \right] \sim \chi^2(1),$$

jehož výsledky jsou uvedeny v tabulce 7.

**Tabulka 7****Testování modelů pomocí Kupiecova TUFF testu**

	$\alpha$ kvantil	model	$LR_{TUFF}$ testová statistika	výstup testu
PX	0,05	FIGARCH	0,07978	VHODNÝ
	0,05	GARCH	0,07978	VHODNÝ
	0,05	EWMA	0,07978	VHODNÝ
	0,01	FIGARCH	0,07978	VHODNÝ
	0,01	GARCH	0,07978	VHODNÝ
	0,01	EWMA	0,07978	VHODNÝ
BUX	0,05	FIGARCH	0,91434	VHODNÝ
	0,05	GARCH	0,91434	VHODNÝ
	0,05	EWMA	0,91434	<b>VHODNÝ</b>
	0,01	FIGARCH	6,12015	NEVHODNÝ
	0,01	GARCH	6,12015	NEVHODNÝ
	0,01	EWMA	0,91434	VHODNÝ

Dle Kupiecova TUFF testu byly při výpočtu 99% VaR indexu BUX odmítnuty modely FIGARCH a GARCH, naopak ve všech případech byl jako vhodný shledán model EWMA. Ovšem tento test má nízkou sílu v identifikaci špatných modelů pro VaR, a tedy jeho závěrům autor nepřikládá velkou váhu. Uvažováním pravděpodobnosti nastání události překročení VaR v čase  $t$  podmíněné (ne)překročením v čase  $(t-1)$  je založen Christoffersenův test (Christoffersen, 1996). Testová statistika Christoffersenova testu má tvar

$$LR_{CHR} = -2 \ln \left[ \frac{(1-\pi)^{n_{00}+n_{10}} \pi^{n_{01}+n_{11}}}{(1-\pi_0)^{n_{00}} \pi_0^{n_{01}} (1-\pi_1)^{n_{10}} \pi_1^{n_{11}}} \right] \sim \chi^2(1), \quad (14)$$

kde  $\pi, \pi_0, \pi_1$  jsou příslušné pravděpodobnosti a  $n_{ij}$  podmíněné marginální četnosti výskytů překročení VaR. Výsledky tohoto testu validity modelů jsou uvedeny v tabulce 8.

**Tabulka 8****Testování modelů pomocí Christoffersenova testu**

	$\alpha$ kvantil	model	LR testová statistika	výstup testu
PX	0,05	FIGARCH	0,71274	VHODNÝ
	0,05	GARCH	1,62214	VHODNÝ
	0,05	EWMA	7,89270	NEVHODNÝ
	0,01	FIGARCH	0,00000	VHODNÝ
	0,01	GARCH	0,00000	VHODNÝ
	0,01	EWMA	1,69834	VHODNÝ
BUX	0,05	FIGARCH	0,01304	VHODNÝ
	0,05	GARCH	4,26881	VHODNÝ
	0,05	EWMA	0,17010	<b>VHODNÝ</b>
	0,01	FIGARCH	3,50699	VHODNÝ
	0,01	GARCH	2,86384	VHODNÝ
	0,01	EWMA	2,33467	VHODNÝ

Pomocí Christoffersenova testu byla kromě validity modelů volatility (s výjimkou modelu EWMA) prokázána i skutečnost, že se v časových řadách výnosů nevyskytují clustery.

**Závěr**

V tomto článku byly popsány frakcionálně integrovaný model GARCH, který může být použitelný pro modelování podmíněné heteroskedasticity v případě jiného než exponenciálního poklesu autokorelační funkce a model EWMA. Jako možný nástroj pro přesnější modelování volatility byly oba modely zasazeny do metodologie Value at Risk.

Pomocí testování podmíněné heteroskedasticity na denních datech logaritmických měr výnosů burzovních indexů PX a BUX je potvrzena oprávněnost použití modelů podmíněné heteroskedasticity. Následná R/S analýza prokázala existenci dlouhé paměti v procesu volatility (u indexu PX), a tedy jistou vhodnost modelu FIGARCH. Všechny odhady parametrů modelů jsou v souladu s danou teorií. Odhady parametru frakcionální difference jsou statisticky významné, přičemž odhad není celočíselný, a tedy poskytuje informaci o rychlosti promítnutí šoků do volatility. Lze konstatovat, že pokud nastane šok např. v podobě většího či menšího výnosu než je výnos očekávaný, bude tento efekt projevující se do podmíněného rozptylu v čase hyperbolicky klesat a je velmi perzistentní. Z tohoto důvodu se autor domnívá, že frakcionálně integrovaný model volatility může sloužit jako vhodný nástroj pro sledování dlouhodobých závislostí v časových řadách výnosů, zatímco pro krátkodobé závislosti je dostačující např. model GARCH.

Dle testu normality je potvrzen teoretický poznatek odlišného rozdělení, přičemž byla zjištěna větší špičatost a záporné zešíkmení rozdělení standardizovaných reziduí oproti rozdělení normálnímu. Tudíž je jednak z hlediska dosažených hodnot momentů, tak i dostupnosti softwaru (GiveWin, OxMetrics) shledán jako vhodnější pro následný výpočet Value at Risk předpoklad Studentova t-rozdělení výnosů.

Value at Risk pro jednotlivé burzovní indexy je kalkulován na denní bázi se zvolenou 95% a 99% pravděpodobností, přičemž je uvažována dlouhá pozice držby indexů. Vhodnost analyzovaných modelů volatility pro výpočet VaR autor kvantifikuje pomocí statistických testů – Kupiecův, TUFF a Christoffersenův test. Na základě těchto testů autor shledává model FIGARCH jako vhodný nástroj pro modelování podmíněného rozptylu, zejména v situaci prokázání dlouhé paměti v procesech volatility.

Na základě této analýzy vybraných modelů podmíněné heteroskedasticity autor konstatuje jako nedostačující pouze přijmout metodiku RiskMetrics s modelem EWMA, ale doporučuje provést důkladnou analýzu časových řad (např. R/S analýza) s následným odhadem parametrů u větší škály modelů. A teprve na základě prozkoumání charakteristik časových řad a provedení backtestingu zvolit vhodný model volatility pro výpočet VaR. Ovšem na druhou stranu ani backtesting neposkytuje jednoznačnou odpověď pro výběr vhodného modelu, a to ať už z důvodu slabé síly testu nebo rozdílných „doporučení“ o validitě modelu. Avšak je více než zřejmé, že díky charakteru finančních časových řad je nedostatečné při kalkulaci VaR uvažovat konstantní volatilitu v podobě směrodatné odchylky, nýbrž je nutné použít např. zmíněné autoregresní modely volatility či model stochastické volatility.

Pro další výzkum vedoucí k zpřesnění stanovování Value at Risk např. při výpočtech kapitálových požadavků v rámci Basel III, které mají zásadní význam mj. pro úvěrovou politiku bank, by bylo vhodné zabývat se i přístupy opírající se o vícerozměrné modely podmíněné heteroskedasticity (např. vícerozměrné modely EWMA či GARCH typu vech, BEKK apod.), a to především u modelování rozptylu evropských burzovních indexů, kde lze očekávat, že dochází k efektu „rozlévání volatility“ mezi jednotlivými akciovými trhy.

## Literatura

- BAILLIE, R. T.; BOLLERSLEV, T.; MIKKELSON, H. O. 1996. Fractionally integrated generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*. 1996, vol. 74, s. 3–30.
- BOLLERSLEV, T.; WOOLBRIDGE, J. M. 1992. Quasi-maximum Likelihood Estimation and Inference in Dynamic Models with Time-varying Covariances. *Econometric Reviews*. 1992, vol. 11, s. 143–172.
- CHRISTOFFERSEN, P. F. 1998. Evaluating Interval Forecasts. *International Economic Review*. 1998, vol. 39, s. 841–862.
- GRANGER, C. W. J. 1980. Long Memory Relationships and the Aggregation of Dynamic Models. *Journal of Econometrics*. 1980, vol. 14, s. 227–238.
- HOSKING, J. R. M. 1981. Fractional Differencing. *Biometrika*. 1981, vol. 68, s. 165–176.
- JORION, P. 1997. *Value at Risk*. 1. vyd. 1997. ISBN 0-7863-0848-6.
- J. P. MORGAN. 1996. RiskMetrics – Technical Document. New York : J.P. Morgan, 1996. [www.jpmorgan.com](http://www.jpmorgan.com).

- KUPIEC, P. 1995. Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. *Journal of Derivatives*. 1995, vol. 2, s. 174–184.
- MANDELBROT, B. 1963. The Variation of Certain Speculative Prices. *Journal of Business*. 1963, vol. 36, s. 394–419.
- TREŠL, J. 1999. *Statistické metody a kapitálové trhy*. 1. vyd. 1999. ISBN 80-7079-911-0.

## APPLICATION OF FIGARCH AND EWMA MODELS ON STOCK INDICES PX AND BUX

**Abstract:** Volatility of the financial time series belongs to the crucial estimated parameters in finance (e.g. in risk management, derivative pricing). It is well known, that volatility varies in time, so that new approaches of volatility modeling have appeared. In this paper two models of the conditional heteroskedasticity – fractionally integrated GARCH (FIGARCH) and EWMA are presented. These models are illustrated on the daily historical returns of stock index PX and index BUX. Standard tests of normality, autocorrelation and conditional heteroskedasticity are applied to these log-return time series and before estimating the models, which confirm a usability of the conditional heteroskedasticity models. Empirical results of the Rescale Range analysis (R/S) indicate a long memory in the volatility process of PX index and the first 40 autocorrelations of the square log-returns show their hyperbolic decay. The volatility models are estimated by quasi-maximum likelihood method with Student's t-distribution and used to the calculation of the 1-day 95% and 99% Value at Risk values. Finally, the validity of the models is verified by Kupiec's test, TUFF and Christoffersen's test. These tests demonstrate, that the FIGARCH model is a suitable alternative to the EWMA model in the Value at Risk calculation.

**Keywords:** PX and BUX indices, fractionally integrated process, FIGARCH, Value at Risk, EWMA

**JEL Classification:** C12, C51, C58.