

---

## SROVNÁNÍ VOLATILITY AKCIOVÝCH INDEXŮ PX A FTSE 100

Adam Borovička\*

### Úvod

*Volatilita* – slovo, které slyšíme dnes a denně. Valí se na nás z televizních obrazovek, hlasových přijímačů, tištěných médií, vkrádá se nám do rozhovoru s kamarády v restauraci, na obchodních jednáních s klienty či partnery. Proč je toto cizí slovo v dnešní době tak „v kurzu“? Odpověď zní – ekonomická krize! To ona nás naučila vnímání pojmu, za kterým se zprostředkovaně skrývá nestabilita, častá vychýlenost od průměrných hodnot, nestálost. Jak příznačné pojmy pro realitu, ve které se řítí zavedené bankovní domy, největší ekonomiky světa padají do recese, centrální banky vkládají do oběhu obrovské sumy peněžních prostředků, desetitisíce společností krachují, občané přicházejí o práci.

Volatilita označuje míru kolísání hodnoty aktiva, popř. jeho výnosové míry. Volatilitu můžeme chápat jako míru rizika spojenou s investicí do určitého aktiva<sup>1</sup>. Nadměrně zvýšená volatilita se plně v nedávných měsících projevila na finančních trzích strmým poklesem cen akciových titulů, také dluhopisů a některých komodit. Výprodeje zejména akcií epochálních rozměrů odsoudily prostředí finančních trhů do hluboké krize, z které se pomalými kroky vzpamatovávají.

Cíl příspěvku je spatřován v modelování akciových indexů PX a FTSE 100. Při modelování a analýze mnoha ekonomických, zejména pak finančních časových řad, hraje zcela nezanedbatelnou roli výše popsáný jev, volatilita. Takové časové řady typicky vykazují střídavá období relativního „klidu“ a poměrně vysoké variability a volatility (Hušek, 2007). V této situaci vstupují do popředí právě **modely volatility**. Zkoumané modely se tedy nebudou zabývat úrovní časových řad, nýbrž jejich variabilitou. Hovoříme o skupině modelů, které charakterizují tzv. *podmíněnou heteroskedasticitu* (Arlt a kol., 2007). Zameření modelů umožňuje zachytit měnící se podmínky nejistoty v tržním prostředí. Jejich praktická aplikace je široká, velmi dobře mohou posloužit při optimalizaci portfolia či intervalových předpovědích v časových řadách (Arlt a kol., 2007).

---

\* Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta informatiky a statistiky (adam.borovicka@vse.cz).

1 Portál <http://cs.wikipedia.org>, 2010.

## 1. Seznámení s burzovním trhem v Praze a Londýně

### 1.1 Burza cenných papírů Praha

Zahájení obchodování na parketu pražské burzy se datuje k 6. dubnu 1993. Burza cenných papírů Praha je právní formou akciová společnost. Přístup do burzovního obchodního systému mají pouze licencovaní obchodníci, kteří jsou členy burzy, tudíž BCPP je založena na členském principu. Burza v Praze je elektronickou, kde funguje automatizovaný obchodní systém, který je založen na automatickém zpracování objednávek, kdy jednotliví členové burzy jsou on-line připojeni na centrální počítač a vydávají jednotlivé nákupní a prodejní příkazy. Můžeme rozlišit několik druhů obchodů, nás však budou zajímat hlavně obchody s účastí tvůrců trhu v **Systému pro podporu trhu akcií a dluhopisů**. V současnosti je v tomto systému obchodováno 15 akciových emisí. K obchodování v systému SPAD se využívá *elektronizovaný obchodní systém řízený cenou (systém řízený kvótami)*, který využívá služeb *market makerů*, kteří neustále kótují nákupní a prodejní kursy. Jelikož fungují v aktivní roli, obchodují na vlastní účet a riziko, mají schopnost vyrovnávat nesoulad mezi nabídkou a poptávkou, čímž udržují likviditu na trhu. Dalo by se tedy očekávat, že vliv hodnot kursu z minulého období na aktuální stav bude spíše silnější.

Oficiálním indexem pražské burzy cenných papírů je **index PX**. První výpočet tohoto indexu se uskutečnil 20. 3. 2006. Stal se nástupcem indexů PX50 a PX-D a převzal historické hodnoty nejstaršího indexu pražské burzy PX50. V indexu jsou uvedeny nejsilnější společnosti obchodované na pražské burze v systému SPAD. Index PX je počítán z cen vážený tržní kapitalizací. Nezohledňuje dividendové výnosy akciových titulů (Veselá, 2005). Báze indexu je tvořena v dnešní době (ke dni 25. 2. 2011) patnácti akciovými tituly, každý zaujímá jinou relativní váhu (podíl) na indexu. Jelikož se báze často mění, nebudeme uvádět kompletní přehled podílů jednotlivých titulů. Vystačíme si s vyjádřením, že přibližně čtyři pětiny indexu tvoří společnosti ČEZ, Erste Bank, Komerční banka a Telefónica O2<sup>2</sup>.

### 1.2 London Stock Exchange

Historie londýnské burzy sahá až do 17. století. London Stock Exchange (LSE) dal vzniknout rok 1801<sup>3</sup>. Burza v Londýně se může pyšnit největším mezinárodním zastoupením investičních instrumentů společností z více než šedesáti zemí světa. Z hlediska tržní hodnoty kotovaných společností drží burza evropský primát, v celosvětovém měřítku se pravidelně umísťuje na předních místech. Zcela bezkonkurenční postavení zaujímá díky svým vysoce likvidním trhům a využívání velmi sofistikovaných finančních technologií. Portfolio obchodovaných investičních instrumentů je velice široké, jsou obchodovány akcie, dluhopisy, depozitní stvrzenky, opční listy, opce či investiční certifikáty<sup>4</sup>. Obchodování na LSE je založeno na členském principu (Musílek,

2 Portál [www.bcpp.cz](http://www.bcpp.cz), 2010.

3 Portál <http://en.wikipedia.org>, 2010.

4 Portál [www.sfinance.cz](http://www.sfinance.cz), 2010.

1996). Hlavní trh londýnské burzy využívá obchodní systém řízený příkazy v elektronické podobě (systém centrální objednávkové knihy)<sup>5</sup>, kde působí počítač, který páruje nákupní a prodejní signály, přičemž kurs je stanoven několikrát za den. Tento systém mi spíše připadá jako generátor oddělených celků, kde se tvoří kursy akciových emisí, tudíž závislost sousedních hodnot bude slabšího charakteru.

Akciový index **FTSE 100** je nejpoužívanějším indikátorem akciového trhu ve Velké Británii. Počátek měření datujeme k 3. 1. 1984, kdy se jeho výchozí hodnota stanovila na hranici 1000 bodů<sup>6</sup>. Index je tvořen jedním stem největších britských firem, jejichž emise jsou posuzovány z hlediska tržní kapitalizace a likvidity<sup>7</sup>. Konstrukce indexu je obdobná jako u indexu PX na pražské burze. Báze FTSE 100 je proměnlivá, největší společnosti figurující v širším indexu FTSE 250 mohou při splnění konkrétní výše tržní kapitalizace postoupit do báze FTSE 100 a nahradit tak některé dosavadní firmy v tomto indexu<sup>8</sup>.

## 2. Modely volatility<sup>9</sup>

Modely volatility vycházejí z reálného předpokladu, že podmíněné rozptyly jsou v čase proměnlivé. Matematicky si sledovaný model vyjádříme podle vztahu

$$X_t = \Phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (1)$$

kde  $|\Phi_1| < 1$  a  $\{\varepsilon_t\}$  je podmíněně heteroskedastický proces s podmíněnou střední hodnotou  $E(\varepsilon_t | \Omega_{t-1}) = 0$  a podmíněným rozptylem  $D(\varepsilon_t | \Omega_{t-1}) = E(\varepsilon_t^2 | \Omega_{t-1}) = h_t$ , kde  $\Omega_{t-1}$  je relevantní minulé informace až do času  $t - 1$ . Tyto požadavky splňuje model procesu  $\{\varepsilon_t\}$  ve tvaru

$$\varepsilon_t = e_t h_t^{1/2}, \quad (2)$$

kde veličiny procesu  $\{e_t\}$  jsou nezávislé s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem. Jestliže je rozdělení náhodné veličiny  $e_t$  za podmínky informace, která je k dispozici v čase  $t - 1$ , normované normální, totiž  $e_t \sim N_{t-1}(0, 1)$ , pak je rozdělení náhodné veličiny  $X_t$  za podmínky informace, která je k dispozici v čase  $t - 1$ , normální s podmíněným rozptylem měnícím se v závislosti na čase, tj.  $X_t \sim N_{t-1}(0, h_t)$ . Na základě Jensenovy nerovnosti (Arlt a kol., 2007) tvrdíme, že špičatost nepodmíněného rozdělení  $\varepsilon_t$  je větší nebo rovna špičatosti normovaného normálního rozdělení.

Různá formulace vývoje podmíněného rozptylu  $h_t$  v čase dává vzniknout několika modelům volatility, linerárního či nelineárního charakteru.

5 Portál [www.londonstockexchange.com](http://www.londonstockexchange.com), 2010.

6 Portál <http://en.wikipedia.org>, 2010.

7 Portál [www.ftse.com](http://www.ftse.com), 2010.

8 Portál <http://en.wikipedia.org>, 2010.

9 Celá tato kapitola vychází z publikace Arlt a kol., 2007. Pokud bude použit jiný zdroj, bude v kapitole citován.

## 2.1 Lineární modely volatility

Nejdříve se podíváme na modely, které byly poprvé popsány v první polovině 80. let minulého století Robertem F. Englem. Pro lineární modely volatility je charakteristické, že podmíněný rozptyl je lineární funkcí veličin  $\varepsilon_{t-1}^2, \varepsilon_{t-2}^2, \dots, \varepsilon_{t-q}^2$ .

### 2.1.1 Model ARCH(q)

Obecný model ARCH vykazuje podmíněný rozptyl ve formě

$$h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2. \quad (3)$$

Podmínky  $\omega > 0$  a  $\alpha_i \geq 0$  pro  $i = 1, 2, \dots, q$  zaručují kladný podmíněný rozptyl. Model lze též vyjádřit v autoregresním tvaru. Po úpravách dostáváme

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 + v_t, \quad (4)$$

kde  $v_t = \varepsilon_t^2 - h_t$ .

Nepodmíněný rozptyl procesu  $\{\varepsilon_t\}$  má tvar

$$D(\varepsilon_t) = \frac{\omega}{1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_q}, \quad (5)$$

což znamená, že je konstantní v čase a proces  $\{\varepsilon_t\}$  je nepodmíněně homoskedastický.

Model ARCH umožňuje zachytit shluky volatility v časové řadě, stejně tak vyšší špičatost pravděpodobnostního rozdělení než je špičatost rozdělení normálního (Arlt a kol., 2007 či Hušek, 2007).

### 2.1.2 Model GARCH(p,q)

Mnohdy se setkáváme při modelování časových řad pomocí modelů ARCH(q) s velmi vysokým parametrem  $q$ , což má za následek odhadování velkého množství parametrů. V roce 1986 Tim P. Bollerslev navrhl řešení rozšířením stávajícího modelu o zpožděný rozptyl.

Podmíněný rozptyl obecného modelu GARCH(p,q) pak vyjadřujeme vztahem

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i}. \quad (6)$$

Kladný podmíněný rozptyl zaručují podmínky  $\omega > 0$ ,  $\alpha_i > 0$  pro  $i = 1, 2, \dots, q$  a  $\beta_i \geq 0$  pro  $i = 1, 2, \dots, p$ .

Model GARCH(p,q) také můžeme zapsat ve tvaru

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i) \varepsilon_{t-i}^2 - \sum_{i=1}^p \beta_i v_{t-i} + v_t, \quad (7)$$

kde  $v_t = \varepsilon_t^2 - h_t$  a  $m = \max \{p, q\}$ .

Nepodmíněný rozptyl vykazuje konstantní vývoj v čase, proces  $\{\varepsilon_t\}$  je nepodmíněně homoskedastický. Opět lze dokázat větší špičatost rozdělení náhodné veličiny  $\varepsilon_t$ , než vykazuje normální rozdělení.

## 2.2 Nelineární modely volatility

Při analýze finančních časových řad můžeme přijít do styku s různými asymetrickými efekty. Za nejdůležitější asi považujeme tzv. *pákový efekt*, který reflektuje nestejnoměrný projev kladných a záporných šoků do podmíněného rozptylu. Lineární modely nejsou s to zohledňovat tento či jiný projev asymetrie, protože podmíněný rozptyl v nich závisí pouze na čtverci šoků, tudíž kladné i záporné šoky mají totožný efekt.

Jelikož většina nelineárních modelů volatility usiluje o zachycení různých efektů kladných a záporných šoků, mohou být modely velmi podobné, proto byla v 90. letech minulého století vymyšlena metoda, která jednotlivé modely porovnává. Metoda je založena na konstrukci funkce *NIC*, která určuje, jak se nová informace promítá do volatility. Jinými slovy ukazuje vztah mezi šokem  $\varepsilon_t$  a podmíněným rozptylem  $h_{t+1}$  za předpokladu konstantních všech minulých a přítomných informací. Konkrétně například v modelu GARCH(1,1) má funkce *NIC* tvar

$$NIC(\varepsilon_t | h_t = h_c) = \omega + \alpha_1 \varepsilon_t^2 + \beta_1 h_c. \quad (8)$$

*NIC* je kvadratická funkce se středem v bodě  $\varepsilon_t = 0$ . V praxi se volí  $h_t$  rovno nepodmíněnému rozptylemu procesu  $\{\varepsilon_t\}$ , tedy  $\sigma_\varepsilon^2$ .

### 2.2.1 Model EGARCH(p,q)

Model EGARCH byl vůbec prvním, který dokázal zachytit asymetrický šok. Nejdříve se podíváme na model EGARCH(1,1), kde podmíněný rozptyl, vlastně jeho přirozený logaritmus, vykazuje tvar

$$\ln(h_t) = \omega + g(e_{t-1}) + \beta_1 \ln(h_{t-1}), \quad (9)$$

kde  $g(e_{t-1}) = \alpha_1 e_{t-1} + \gamma_1 [|e_{t-1}| - E(|e_{t-1}|)]$ .

Jelikož model popisuje vztah mezi logaritmem podmíněného rozptylu a minulými šoky, neklademe žádná omezení na parametry  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ , která by zajišťovala nezápornost podmíněného rozptylu. Z vlastností procesu  $\{e_t\}$  vyplývá, že proces  $\{g(e_t)\}$  má nulovou střední hodnotu a není autokorelovaný.

Pro analýzu asymetrie ve vztahu podmíněného rozptylu a šoků vyjádříme funkci  $g(e_t)$  ve tvaru

$$g(e_t) = (\alpha_1 + \gamma_1)e_t I(e_t > 0) + (\alpha_1 - \gamma_1)e_t I(e_t < 0) - \gamma_1 E(|e_{t-1}|), \quad (10)$$

kde  $I(A)$  je funkce, která nabývá hodnot 1, jestliže jev  $A$  nastane a hodnoty 0, pokud jev  $A$  nenastane. Součet parametrů  $(\alpha_1 + \gamma_1)$  ukazuje vliv kladných šoků na logaritmus podmíněného rozptylu, vliv záporných šoků pak zobrazuje rozdíl parametrů  $(\alpha_1 - \gamma_1)$ .

Funkce NIC modelu EGARCH(1,1) má formu

$$NIC(\varepsilon_t | h_t = \sigma_\varepsilon^2) = \begin{cases} A \exp\left(\frac{\alpha_1 + \gamma_1}{\sigma_\varepsilon} \varepsilon_t\right) & \text{pro } \varepsilon_t > 0, \\ A \exp\left(\frac{\alpha_1 - \gamma_1}{\sigma_\varepsilon} \varepsilon_t\right) & \text{pro } \varepsilon_t < 0, \end{cases} \quad (11)$$

kde  $A = \sigma_\varepsilon^{2\beta_1} \exp(\omega - \gamma_1 \sqrt{2/\pi})$ .

Nakonec ještě vyjádříme obecný model EGARCH(p,q) pomocí operátoru zpoždění ve tvaru

$$[1 - \beta(B)] \ln(h_t) = \omega + [1 + \varphi(B)] g(e_{t-1}),$$

kde  $\beta(B) = \sum_{i=1}^p \beta_i B^i$ ,

$$\varphi(B) = \sum_{i=1}^q \varphi_i B^i \quad \text{a}$$

$$g(e_{t-1}) = \alpha_1 e_{t-1} + \gamma_1 [|e_{t-1}| - E(|e_{t-1}|)].$$

### 2.2.2 Model GJR-GARCH(p,q)

Forma obecného modelu GJR-GARCH(p,q) čistě závisí na podobě modelu GARCH(p,q). Tedy, model GARCH(1,1) lze upravit do tvaru

$$h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 [1 - I(\varepsilon_{t-1} > 0)] + \gamma_1 \varepsilon_{t-1}^2 I(\varepsilon_{t-1} > 0) + \beta_1 h_{t-1}, \quad (12)$$

který budeme označovat právě jako model GJR-GARCH(1,1). Podmíněný rozptyl vykazuje nezáporných hodnot, pokud  $\omega > 0$ ,  $(\alpha_1 + \gamma_1)/2 \geq 0$  a  $\beta_1 > 0$ . Model je stacionární v kovariancích, pokud platí  $(\alpha_1 + \gamma_1)/2 + \beta_1 < 1$ .

Funkci NIC modelu GJR-GARCH(1,1) pak píšeme ve tvaru

$$NIC(\varepsilon_t | h_t = \sigma_\varepsilon^2) = A + \begin{cases} \alpha_1 \varepsilon_t^2 & \text{pro } \varepsilon_t < 0, \\ \gamma_1 \varepsilon_t^2 & \text{pro } \varepsilon_t > 0, \end{cases} \quad (13)$$

kde  $A = \omega + \beta_1 \sigma_\varepsilon^2$ .

Pro model stacionární v kovariancích je podmíněný rozptyl

$$\sigma_\varepsilon^2 = \omega / [1 - (\alpha_1 + \gamma_1) / 2 - \beta_1].$$

### 2.3 Konstrukce modelu volatility

Při výstavbě modelu musíme analyzovat stacionaritu sledovaných časových řad, provádíme testy podmíněné heteroskedasticity a normality, dále testujeme hypotézu podmíněné heteroskedasticity nelineárního typu. Po odhadnutí parametrů zvoleného modelu podmíněné heteroskedasticity se ověřuje jeho vhodnost diagnostickými testy (testy autokorelace, heteroskedasticity či normality). Pro další potřeby se model dále může modifikovat. Konečná verze modelu pak slouží pro popisné nebo predikční účely.

Stacionaritu časových řad budeme diagnostikovat pomocí *grafických nástrojů*, *výběrové autokorelační funkce (ACF)*, *výběrové parciální autokorelační funkce (PACF)* a *testů Dickeye a Fullera*. Pro analýzu podmíněné heteroskedasticity lineárního typu využijeme *ARCH test*, při zkoumání podmíněné heteroskedasticity nelineárního charakteru pak *SB*, *PSB* a *NSB testy*. Testování autokorelace budeme provádět pomocí *Portmanteau testu*. *Jarqueův-Berův test normality* pak poslouží pro sledování charakteru rozdělení sledované veličiny (Arlt a kol., 2007 nebo Hušek, 2007).

#### 2.3.1 Stacionarita časových řad

Posouzení grafu časové řady či analýzu tvaru výběrové autokorelační či parciální autokorelační funkce můžeme zařadit mezi subjektivní metody identifikace stacionarity časové řady.

Velmi jednoduchou metodou je právě posouzení *grafu časové řady*. Pokud odečteme z nákresu evidentní přítomnost trendu, předpokládáme nestacionaritu sledované časové řady.

Podobně analyzujeme průběh *výběrové autokorelační funkce*, kde sledujeme, jestli klesá alespoň přibližně lineární tempem, což ukazuje opět na nestacionaritu časové řady. *Výběrová parciální autokorelační funkce* pak mimo jiné umožňuje sledovat korelaci mezi dvěma vybranými náhodnými veličinami očištěnou od vlivu ostatních veličin.

Konečně se dostáváme k čistě analytickým statistickým nástrojům. Při sledování stacionarity časové řady budeme uvažovat základní model

$$X_t = \Phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (14)$$

kde je koeficient  $\Phi_1$  autokorelace 1. řádu. Tento proces se stane nestacionárním, pokud platí  $\rho = 1$  (tzv. jednotkový kořen). Na testování (nulové) hypotézy, že  $\rho = 1$ , resp. časová řada je nestacionární, existuje několik testů, např. *testy Dickeye a Fullera*, popř. jejich rozšířené verze (Arlt a kol., 2007 či Hušek, 2007).

### 2.3.2 Testy autokorelace

Přítomná autokorelace v modelu negativně dopadá na optimální vlastnosti odhadnutých regresních koeficientů. Odhady většinou zůstávají nestranné a konzistentní, ale ztrácejí vydatnost. Běžné testovací postupy či spočtené intervaly spolehlivosti související s daným modelem nelze považovat za spolehlivé.

K testování přítomnosti autokorelace nesystematické (náhodné) složky využijeme *Portmanteau test*. Testuje se hypotéza  $H_0: \rho_1 = \rho_2 = \dots = 0$  proti hypotéze  $H_1: \text{non } H_0$ , kde  $\rho_k$  pro  $k = 1, 2, \dots, K$  jsou autokorelace nesystematické složky modelu pro zpoždění  $k$ . Testové kritérium stanovujeme vztahem

$$Q = T \sum_{k=1}^K \hat{\rho}_k^2, \quad (15)$$

které má pro vysoké hodnoty  $T$  a  $K$  přibližně rozdělení  $\chi^2$  s  $(K - p - q)$  stupni volnosti. Porovnáním hodnoty testového kritéria (15) s příslušnými kvantily rozdělení  $\chi^2(K - p - q)$  lze testovat hypotézu o neautokorelovanosti náhodné složky. Pro malé rozsahy výběrů se statistika (15) modifikuje.

### 2.3.3 Testy normality

Ke kompletní diagnóze modelu je určitě potřebné také otestovat rozdělení náhodné složky. Normalita nesystematické složky je důležitá zejména pro testování parametrů modelu, pro testování autokorelací či pro konstrukci intervalových předpovědí.

*Jarque-Bera test normality* by měl sloužit právě k tomuto účelu. Je založen na myšlence současného testování šikmosti a špičatosti. Předpokládáme, že třetí normovaný moment (šikmost) normálního rozdělení je 0 a čtvrtý normovaný moment (špičatost) normálního rozdělení je 3. Testové kritérium vyjádříme vztahem

$$JB = SK^2 + KU^2, \quad (16)$$

kde  $SK$  je testové kritérium pro testování šikmosti rozdělení

$$SK = \left( \frac{T}{6} \right)^{1/2} \frac{\hat{m}_3}{\hat{m}_2^{3/2}} \quad (17)$$

a  $KU$  je testové kritérium pro testování špičatosti rozdělení

$$KU = \left( \frac{T}{24} \right)^{1/2} \left( \frac{\hat{m}_4}{\hat{m}_2} - 3 \right), \quad (18)$$



$$\text{kde } \hat{m}_j = \frac{\sum_{t=1}^T (\hat{a}_t - \bar{a})^j}{T} \quad \text{a} \quad \bar{a} = \frac{\sum_{t=1}^T \hat{a}_t}{T}, \quad j = 2, 3, 4.$$

Pokud bude platit nulová hypotéza zastupující normalitu nesystematické složky modelu, mají statistiky  $SK$  a  $KU$  asymptoticky normované normální rozdělení  $N(0, 1)$ . Statistika  $JB$  má rozdělení  $\chi^2(2)$ . K zamítnutí nulové hypotézy také může vést skutečnost, že veličiny nesystematické složky nemají konstantní rozptyl.

#### 2.3.4 Testy podmíněné heteroskedasticity lineárního typu

Jev heteroskedasticity zkoumáme a zjišťujeme stejně jako u autokorelace z důvodů negativních dopadů na výsledný model. Odhady regresních koeficientů ztrácejí některé optimální vlastnosti, zejména vydatnost, statistické testy mohou podávat falešné informace.

Konkrétně k identifikaci podmíněné heteroskedasticity lineárního typu využijeme *ARCH test*, který lze také interpretovat jako test autokorelace čtverce nesystematické složky.

Podmíněný rozptyl  $h_t$  modelu  $ARCH(q)$  je konstantní, jestliže jsou parametry odpovídající veličinám  $\varepsilon_{t-1}^2, \dots, \varepsilon_{t-q}^2$  rovny nule. Jako nulová hypotéza bude figurovat hypotéza podmíněné homoskedasticity, totiž  $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_q = 0$ . Alternativní hypotézou je, že alespoň jeden parametr je různý od nuly, tj.  $H_1 : \text{non } H_0$ . Test bychom pak mohli zapsat v následujících krocích:

1. Odhadnou se parametry lineárního či nelineárního úrovnového modelu a získají se rezidua  $\hat{\varepsilon}_t$  a reziduální součet čtverců  $ESS_0$ .
2. Konstruuje se regresní model  $\hat{\varepsilon}_t^2 = \hat{\omega} + \alpha_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \alpha_2 \hat{\varepsilon}_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q \hat{\varepsilon}_{t-q}^2 + u_t$ , na jehož základě se získá reziduální součet čtverců  $ESS_1$  a index determinace  $R^2$ .
3. Testové kritérium  $LM$  ve tvaru  $TR^2$  má za předpokladu platnosti nulové hypotézy asymptotické rozdělení  $\chi^2(q)$ .
4.  $F$ -verze tohoto testového kritéria pro malé výběry má podobu  $F_{LM} = \frac{(ESS_0 - ESS_1) / q}{ESS_1 / (T - q - 1)}$ , její rozdělení lze za předpokladu platnosti nulové hypotézy aproximovat rozdělením  $F(q, T - q - 1)$ .

#### 2.3.5 Testy podmíněné heteroskedasticity nelineárního typu

Při zjišťování přítomnosti podmíněné heteroskedasticity nelineárního typu můžeme využít dva způsoby. V rámci prvního nejprve zvolíme lineární model volatility a odhadneme jeho parametry. Poté zkoumáme, jestli je model vhodný či by bylo lepší vzhledem k datovým asymetriím použít spíše model nelineární. Druhý přístup je analogií ověřování podmíněné heteroskedasticity lineárního typu. Přímě se totiž testuje

hypotéza podmíněné homoskedasticity proti hypotéze podmíněné heteroskedasticity nelineárního charakteru.

K testování podmíněné heteroskedasticity nelineárního typu využijeme SB, NSB a PSB testy. *SB test* se používá pro objasnění, zda kladné a záporné výnosy bez ohledu na jejich výši mají jiný vliv na podmíněnou heteroskedasticitu. *NSB* a *PSB testy* pak ověřujeme, jestli vliv záporných či kladných výnosů na podmíněný rozptyl závisí také na jejich výši (Arlt a kol., 2007 nebo Hušek, 2007).

Nejdříve si musíme zavést některé proměnné.  $D_{t-1}^-$  bude umělá proměnná, která nabude hodnoty 1, jestliže  $\hat{\varepsilon}_{t-1}$  je záporné nebo hodnoty 0 v jiném případě. Další pomocnou proměnnou bude  $D_{t-1}^+ = 1 - D_{t-1}^-$ . U *SB testu* vycházíme z modelu

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \Phi_0 + \Phi_1 \hat{w}_{t-1} + u_t, \quad (19)$$

kde  $\hat{\varepsilon}_t^2$  je čtverec rezidua lineárního nebo nelineárního úrovnového modelu a  $\hat{w}_{t-1} = D_{t-1}^-$ . Testovanou hypotézou je  $H_0 : \Phi_1 = 0$  a alternativní hypotézou se stává  $H_1 : \Phi_1 \neq 0$ . Testovým kritériem je statistika  $t$ .

Pokud v modelu (19)  $\hat{w}_{t-1} = D_{t-1}^- \hat{\varepsilon}_{t-1}$ , pak se test nazývá *NSB test*. Jestliže platí v modelu (19), že  $\hat{w}_{t-1} = D_{t-1}^+ \hat{\varepsilon}_{t-1}$ , potom se jedná o *PSB test*. Rozdělení statistiky  $t$  je ve všech třech zmíněných testech asymptoticky normované normální.

Uvedené testy můžeme nakonec sloučit. Pak budeme postupovat podle schématu:

1. Odhadnou se parametry lineárního či nelineárního úrovnového modelu a získají se rezidua  $\hat{\varepsilon}_t$  a reziduální součet čtverců  $ESS_0$ .
2. Konstruuje se regresní model  $\hat{\varepsilon}_t^2 = \Phi_0 + \Phi_1 D_{t-1}^- + \Phi_2 D_{t-1}^- \hat{\varepsilon}_{t-1} + \Phi_3 D_{t-1}^+ \hat{\varepsilon}_{t-1} + u_t$ , na jehož základě se získá reziduální součet čtverců  $ESS_1$  a index determinace  $R^2$ . Testovanou hypotézou je  $H_0 : \Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = 0$ , která poukazuje na nepřítomnost asymetrie uvažovaného typu v časové řadě. Alternativní hypotéza pak vykazuje podobu  $H_1 : \text{non } H_0$ .
3. Testové kritérium *LM* ve tvaru  $TR^2$  má za předpokladu platnosti nulové hypotézy asymptoticky rozdělení  $\chi^2(3)$ .
4. *F-verze* tohoto kritéria pro malé výběry vykazuje tvar  $F_{LM} = \frac{(ESS_0 - ESS_1) / 3}{ESS_1 / (T - 4)}$ ,

kde  $ESS_0$  je reziduální součet čtverců  $\sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_t^2$ , její rozdělení lze za předpokladu

platnosti nulové hypotézy aproximovat rozdělením  $F(3, T - 4)$ .

### 2.3.6 Odhad parametrů modelu volatility

O něco podrobněji se zastavíme u odhadových technik parametrů modelu volatility. Základní model výnosů finančních časových řad můžeme rozdělit na dvě části. Jedna část reprezentuje model úrovně časové řady lineárního či nelineárního charakteru, druhá

pak lineární nebo nelineární model volatility časové řady. Popsaný model zapíšeme ve formě

$$X_t = G(\bar{X}_t, \vec{\eta}) + \varepsilon_t, \quad (20)$$

kde  $\bar{X}_t = (1, X_{t-1}, \dots, X_{t-p})'$ ,  $G(\bar{X}_t, \vec{\eta})$  je skeleton lineárního či nelineárního autoregresního modelu s parametry  $\vec{\eta}$ , který je minimálně dvakrát spojitě derivovatelnou funkcí vzhledem k těmto parametrům a  $\{\varepsilon_t\}$  je proces s nulovou podmíněnou střední hodnotou a podmíněným rozptylem  $h_t$  typu lineárního nebo nelineárního modelu GARCH s parametry  $\vec{\varphi}$ . Pak vektor parametrů výše zmíněného modelu je  $\vec{\theta} = (\vec{\eta}', \vec{\varphi}')'$ .

Pro odhad parametrů modelu využijeme *metodu maximální věrohodnosti*. Pokud má  $e_t$  normované normální rozdělení, logaritmus věrohodnostní funkce pro časovou řadu o rozsahu  $T$  pozorování píšeme ve tvaru

$$L(\vec{\theta}) = \sum_{t=1}^T l_t(\vec{\theta}), \quad (21)$$

kde  $l_t(\vec{\theta}) = -1/2 \ln 2\pi - 1/2 \ln h_t - s_t^2 / 2h_t$ .

Maximálně věrohodný odhad získáme maximalizací logaritmu věrohodnostní funkce. Tento odhad řeší rovnici

$$\sum_{t=1}^T \frac{\partial l_t(\vec{\theta})}{\partial \vec{\theta}} = 0.$$

Protože je tato podmínka nelineární v parametrech, používá se k získání maximálně věrohodného odhadu iterativní optimalizační procedura (Arlt a kol., 2007 nebo Hušek, 2007). Zmíněná metoda dává za předpokladu správně zvoleného podmíněného pravděpodobnostního rozdělení odhady parametrů konzistentní a asymptoticky normální.

Problémem je však předpoklad podmíněné normality procesu  $\{\varepsilon_t\}$  u finančních časových řad. Mnohdy se bere v úvahu, že rozdělení veličiny  $e_t$  je Studentovo. Parametry modelu mohou být odhadnuty maximalizací logaritmu věrohodnostní funkce odpovídající tomuto rozdělení. V praxi postupujeme odlišně, jelikož není zcela jednoduché správně rozdělení určit, vycházíme stále z předpokladu normality rozdělení. Odhady jsou stále konzistentní a asymptoticky normální. Tento přístup označujeme jako *quasi metoda maximální věrohodnosti* (Arlt a kol., 2007 či Hušek, 2007).

### 3. Modelování volatility akciových indexů PX a FTSE 100

Po podpůrné teoreticky zaměřené části přecházíme na praktickou aplikaci. Nejprve představíme napozorovaná data týkající se vývoje hodnot akciových indexů PX a FTSE 100<sup>10</sup>. Pro co možná časově nejkomplexnější pohled na volatilitu jsou finanční časové

10 Portál [www.patria.cz](http://www.patria.cz), 2010.

řady přibližně 8,5 roku dlouhé, konkrétně od 1. 5. 2002 do 15. 10. 2010. Jedná se o řady vysokofrekvenční, používáme denní údaje referující o závěrečné ceně příslušného akciového indexu. Záměrně zvolená délka časové řady zahrnuje vliv ekonomické konjunktury, následný drtivý hospodářský pokles s lehkým oživením v závěru období. Zvolení délky časového období ovlivňuje výsledné modely. Veškeré provedené testy, výpočty byly zpracovány v programu PcGive<sup>11</sup>.

### 3.1 Stacionarita časových řad

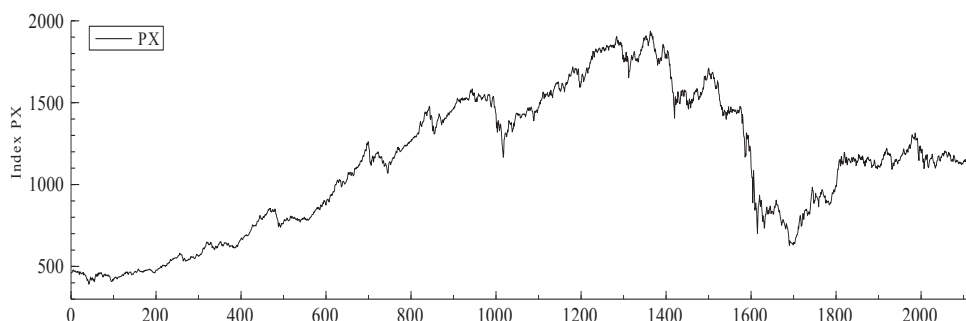
Většina ekonomických časových řad (např. HDP, mzdy, investice) jsou nestacionární. Sledované veličiny mají totiž tendenci vracet se k určité hodnotě či opisovat trend. V těchto případech se nestacionární časové řady původních pozorování transformují na stacionární zpravidla pomocí prvních či vyšších diferencí, popř. logaritmováním či jinou eliminací trendu.

#### 3.1.1 Stacionarita časové řady závěrečných hodnot indexu PX

Při pohledu na níže zobrazený graf (obrázek 1) jednoznačně registrujeme ve vývoji akciového indexu na pražské burze trendy, které signalizují **nestacionaritu** časové řady.

**Obrázek 1**

**Vývoj akciového indexu PX**



Pramen: Výstup z programu PcGive.

*Výběrová autokorelační funkce (ACF) a výběrová parciální autokorelační funkce (PACF) také potvrzují nestacionaritu sledované vysokofrekvenční finanční časové řady, stejně tak provedený rozšířený test Dickeye a Fullera, který neprokazuje na hladině významnosti 5 % hypotézu, že analyzovaná časová řada je stacionární.*

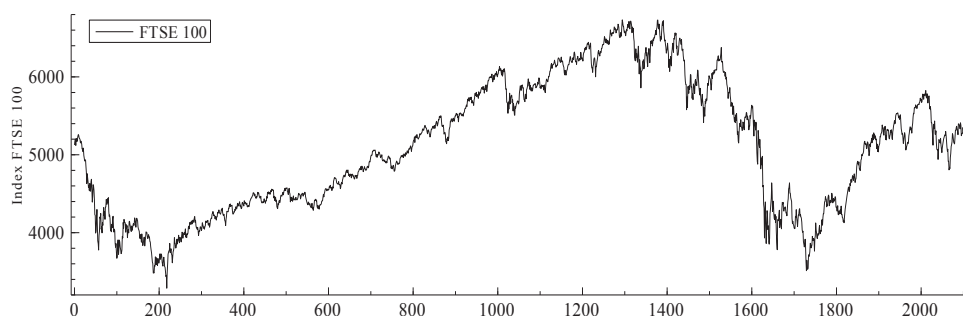
<sup>11</sup> Softwarový produkt PcGive poskytuje veškeré zázemí pro ekonometrické modelování s velmi sofistikovaným a přívětivým uživatelským prostředím. Viz portál [www.pcgive.com](http://www.pcgive.com), 2010.

### 3.1.2 Stacionarita časové řady závěrečných hodnot indexu FTSE 100

Stejně testy a analýzy provedeme i s časovou řadou týkající se závěrečných cen akciového indexu FTSE 100. Nejdříve se opět podíváme na grafické znázornění vývoje těchto hodnot (viz obrázek 2).

**Obrázek 2**

**Vývoj akciového indexu FTSE 100**



Pramen: Výstup z programu PcGive.

Stejně jako u předchozí finanční časové řady identifikujeme **nestacionaritu** časové řady indexu FTSE 100. Nestacionarita časové řady je také potvrzena vývojem *funkcí ACF* a *PACF*, ke stejnému závěru dochází *test jednotkové kořene (test Dickeye a Fullera)*.

### 3.1.3 Stacionarizace časových řad

Při analýze finančních časových řad se vychází z předpokladu logaritmicko-normálního rozdělení, hodnoty akciových indexů totiž nemohou být záporné. Pro dosažení stacionarity dat transformujeme řady logaritmováním. Bohužel i takto upravené časové řady jsou většinou nestacionární, tudíž využíváme ještě diferencování. Diferenci logaritmů je možné interpretovat jako **logaritmus výnosů** (Arlt a kol., 2007).

Pro stacionarizaci časové řady závěrečných cen akciového indexu PX tedy využijeme diferenci logaritmů, kterou vypočítáme vztahem

$$\ln r_t^{PX} = \ln(PX_t) - \ln(PX_{t-1}) = \frac{\ln(PX_t)}{\ln(PX_{t-1})}, \quad (22)$$

kde  $PX_t$ , resp.  $PX_{t-1}$  jsou závěrečné ceny indexu PX v čase  $t$ , resp.  $t-1$ .

Stejnou transformaci na difference logaritmů provedeme u akciového indexu FTSE 100:

$$\ln r_t^{FTSE-100} = \ln(FTSE\_100_t) - \ln(FTSE\_100_{t-1}) = \frac{\ln(FTSE\_100_t)}{\ln(FTSE\_100_{t-1})}, \quad (23)$$

kde  $FTSE_{100,t}$ , resp.  $FTSE_{100,t-1}$  jsou závěrečné ceny indexu FTSE 100 v čase  $t$ , resp.  $t-1$ .

Pokud provedeme příslušné grafické analýzy a testy z předcházející kapitoly na upravená data, obě časové řady budou vykazovat požadovanou **stacionaritu**.

### 3.2 Testy autokorelace, podmíněné heteroskedasticity a normality

Než se pustíme do samotných odhadů konkrétních modelů volatility, musíme příslušná transformovaná data prověřit z hlediska autokorelace, podmíněné heteroskedasticity a normality rozdělení.

#### 3.2.1 Testy logaritmů výnosů akciového indexu PX

**Tabulka 1**

**Testy autokorelace, normality a podmíněné heteroskedasticity logaritmů výnosů indexu PX**

Portmanteau(37): $\chi^2(37) = 120,78$ [0,0000]**
Asymptotic test: $\chi^2(2) = 16156$ [0,0000]**
Normality test: $\chi^2(2) = 2781,9$ [0,0000]**
ARCH 1-1 test: $F(1,2103) = 327,17$ [0,0000]**

Pramen: Výstup z programu PcGive.

*Portmanteau test* potvrzuje skutečnost, že se vyskytuje v časové řadě **autokorelace**. V případě potřeby by tedy bylo vhodné přidat do budoucího modelu volatility zpožděné hodnoty logaritmů výnosů. *Jarqueův-Berův test normality (Asymptotic test)* poukazuje na **nenormální rozdělení**. Toto sdělení nakonec potvrzuje i šikmost, která nabývá hodnoty -0,4. *Test ARCH* identifikuje **podmíněnou heteroskedasticitu** ve sledované časové řadě.

#### 3.2.2 Testy logaritmů výnosů akciového indexu FTSE 100

**Tabulka 2**

**Testy autokorelace, normality a podmíněné heteroskedasticity logaritmů výnosů indexu FTSE 100**

Portmanteau(37): $\chi^2(37) = 175,51$ [0,0000]**
Asymptotic test: $\chi^2(2) = 4028,2$ [0,0000]**
Normality test: $\chi^2(2) = 1301,8$ [0,0000]**
ARCH 1-1 test: $F(1,2103) = 121,88$ [0,0000]**

Pramen: Výstup z programu PcGive.

**Autokorelaci** v časové řadě potvrzuje *Portmanteau test*. *Jarqueův-Berův test* zjišťuje, že ani tato řada **není normálně rozdělena**, což nakonec opět potvrzuje ukazatel šikmosti o hodnotě -0,17. *ARCH test* identifikuje v časové řadě **podmíněnou heteroskedasticitu**.

### 3.2.3 Testy podmíněné heteroskedasticity nelineárního typu logaritmů výnosů indexu PX

Jelikož sledujeme denní finanční časové řady, máme důvodné podezření, že bychom se mohli setkat s asymetrickými efekty. Podíváme se tudíž na možnou existenci již zmíněného tzv. *pákového efektu*.

Nejprve provedeme *SB test*, který na hladině významnosti 5 % prokazuje, že kladné a záporné výnosy bez ohledu na jejich výši mají rozdílný vliv na podmíněnou heteroskedasticitu.

**Tabulka 3**

**Společný SB, PSB, NSB test logaritmů výnosů indexu PX**

	Coefficient	T-prob
Constant	0,000015	0,700
DLPXDt-	-0,000037	0,515
DLPXDt-_1DLPX_1	<b>-0,030943</b>	<b>0,000</b>
DLPXDt+_1DLPX_1	<b>0,019179</b>	<b>0,000</b>
F(3,2102) = 76,93 [0,000]**		

Pramen: Výstup z programu PcGive.

*Společný SB, PSB, NSB test* potvrzuje asymetrii. Podle dílčích *t-testů* nebyl prokázán odlišný vliv kladných a záporných výnosů. Na druhé straně je z testu patrné, že podmíněná heteroskedasticita závisí na výši kladných a záporných výnosů. Jelikož odhad parametru u proměnné charakterizující vliv výše záporného výnosu je záporný a v absolutní hodnotě vyšší než odhad parametru u proměnné charakterizující vliv výše kladných výnosů, úroveň záporných výnosů se do podmíněné heteroskedasticity promítá o něco výrazněji než úroveň výnosů kladných.

### 3.2.4 Testy podmíněné heteroskedasticity nelineárního typu logaritmů výnosů indexu FTSE 100

Nejdříve provedeme *SB test*, který nám podá odpověď na otázku, jestli kladné a záporné výnosy bez ohledu na jejich výši mají jiný vliv na podmíněnou heteroskedasticitu. Odpověď je negativní, test neindikuje přítomnost asymetrického efektu na hladině významnosti 5 %.

Jak ukazuje tabulka 4, *společný SB, PSB, NSB test* však asymetrii potvrzuje. Podle dílčích *t-testů* nebyl prokázán odlišný vliv kladných a záporných výnosů, avšak podmíněná heteroskedasticita závisí na výši kladných a záporných výnosů. Odhad parametru u proměnné charakterizující vliv výše záporného výnosu je záporný a v absolutní hodnotě vyšší než odhad parametru u proměnné charakterizující vliv výše kladných výnosů, tudíž úroveň záporných výnosů se do podmíněné heteroskedasticity promítá o něco silněji než úroveň výnosů kladných.

**Tabulka 4****Společný SB, PSB, NSB test logaritmu výnosů indexu FTSE 100**

	Coefficient	T-prob
Constant	0,000113	0,001
DLFTSE_100Dt-	-0,000065	0,184
DLFTSE_100Dt-_1DLFTSE_100_1	<b>-0,019977</b>	<b>0,000</b>
DLFTSE_100Dt+_1DLFTSE_100_1	<b>0,007467</b>	<b>0,002</b>
F(3,1235) = 30,25 [0,000]**		

Pramen: Výstup z programu PcGive.

Na základě provedených testů časové řady logaritmu výnosů není možné chápat jako realizaci bílého šumu<sup>12</sup>. Spíše se přikláníme k názoru, že by je bylo možné modelovat pomocí modelů volatility.

### 3.3 Stanovení vhodného modelu

Z hlediska výskytu asymetrických efektů zvolíme vhodný model, který bude co nejpřesněji opisovat zkoumanou variabilitu časových řad. Zaměříme se na modely EGARCH(p,q) a GJR-GARCH(p,q) u obou akciových indexů.

#### 3.3.1 Modely volatility pro akciový index PX

Nejdříve se podíváme na závěry plynoucí z použití modelů EGARCH, které zobrazuje tabulka 5. Jedná se o modely EGARCH(1,1) s (ne)zahrnutím zpožděné hodnoty logaritmu výnosů o jedno období (den) a alternativním předpokladem (ne)normality rozdělení.

**Tabulka 5****Modely volatility EGARCH pro akciový index PX**

Model	Log-věrohodnostní funkce
EGARCH(1,1) s normálním rozdělením	6232,31477
EGARCH(1,1) s nenormálním rozdělením	6258,45293
EGARCH(1,1) s normálním rozdělením a 1 zpožděním	6233,02605
EGARCH(1,1) s nenormálním rozdělením a 1 zpožděním	6258,48169

Pramen: Výstup z programu PCGive.

Při aplikaci výše zmíněných modelů vycházejí všechny *t-testy* parametrů statisticky významné na hladině významnosti 0,05. Parametr  $\alpha_1$  u veličiny  $e_{t-1}$  vychází

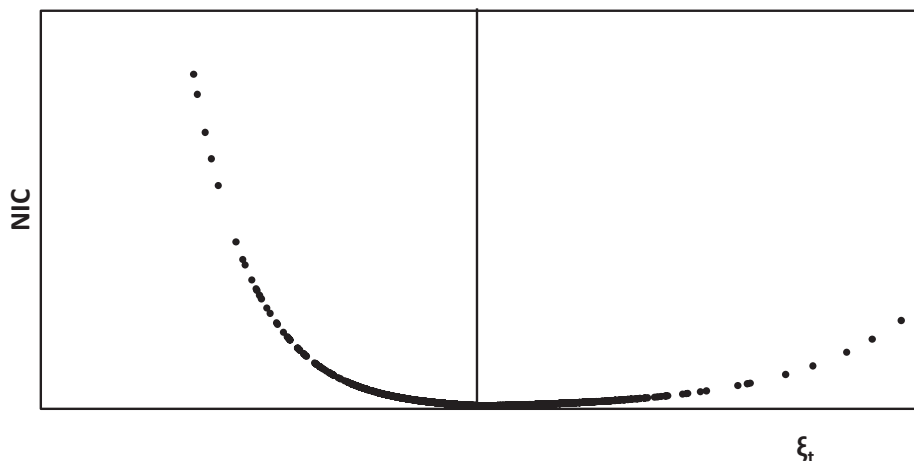
<sup>12</sup> Proces bílého šumu je stochastický proces tvořený řadou nekorelovaných náhodných veličin jednoho pravděpodobnostního rozdělení s nulovou střední hodnotou a konstantním rozptylem.



záporný, což potvrzuje přítomnost asymetrického efektu, který se projevuje v silnějším vlivu záporných hodnot do podmíněné heteroskedasticity než hodnot kladných. Tato skutečnost je zobrazena také v grafu 3 pomocí konstrukce funkce NIC.

**Obrázek 3**

**Funkce NIC modelu EGARCH(1,1) s 10 zpožděními pro akciový index PX**



Pramen: Vlastní vyhotovení v MS EXCEL.

Jelikož mnohdy dochází k porušení předpokladu  $e_t \sim N_{t-1}(0, 1)$ , použití modelu s nenormálním rozdělením, obvykle Studentovým, nepřekvapuje. Diagnostické testy všech použitých modelů vykazují absenci podmíněné heteroskedasticity, *Jarqueův-Berův test* však prokazuje nenormální rozdělení. Co je ale nejpodstatnější, *Portmanteau test* diagnostikuje stále přítomnou autokorelaci. Pojdme tedy do modelů zahrnout více zpožděných hodnot. Z průběhu *autokorelační funkce ACF* a *PACF* usuzujeme, že by bylo záhodno použít zpoždění o délce pět, osm či deset období.

**Tabulka 6**

**Další variace modelů volatility EGARCH pro akciový index PX**

Model	Log-věrohodnostní funkce
EGARCH(1,1) s 5 zpožděními	6214,15035
EGARCH(1,1) s 8 zpožděními	6216,686
EGARCH(1,1) s 10 zpožděními	6213,40659

Pramen: Výstup z programu PCGive.

Modely EGARCH(1,1) zahrnující vysvětlované proměnné ve zpožděních až 5 či až 8 období sice vykazují vyšší hodnotu logaritmu věrohodnostní funkce než model s délkou zpoždění 10, ale také stále zahrnují autokorelaci náhodné složky. Teprve při zahrnutí zpožděné proměnné o deset období zpět autokorelace mizí.

Pro úplnost doplňuji modely, jejichž parametry nejsou jednotkové. Z této oblasti model s největším logaritmem věrohodnostní funkce se statisticky významnými parametry je EGARCH(3,3) opět s délkou zpoždění 10, s hodnotou zlogaritmované věrohodnostní funkce 6225,5236.

Největší hodnota zlogaritmované věrohodnostní funkce vychází ve skupině modelů EGARCH(1,1), avšak jsou zatíženy autokorelací. Proto ze skupiny všech pozorovaných EGARCH modelů se jeví jako nejlepší model pro modelování vývoje logaritmu výnosů akciového indexu PX model **EGARCH(3,3)** s délkou zpoždění 10.

Nyní přejdeme ke GJR-GARCH modelům, opět začneme tabulkovým přehledem (viz tabulka 7).

**Tabulka 7**

**Modely volatility GJR-GARCH pro akciový index PX**

Model	Log-věrohodnostní funkce
<i>GJR-GARCH(1,1) s normálním rozdělením</i>	6236,18472
<i>GJR-GARCH(1,1) s nenormálním rozdělením</i>	6270,12211
<i>GJR-GARCH(1,1) s normálním rozdělením a 1 zpožděním</i>	6237,46667
<i>GJR-GARCH(1,1) s nenormálním rozdělením a 1 zpožděním</i>	6269,95685

Pramen: Výstup z programu PCGive.

Pro modely GJR-GARCH platí obdobné závěry jako pro modely EGARCH. Opět se prokazuje asymetrický vliv kladných a záporných šoků na podmíněnou heteroskedasticitu. Diagnostické testy modelů opět signalizují nenormální rozdělení nesystematické složky a také její autokorelaci.

**Tabulka 8**

**Další variace modelů volatility GJR-GARCH s normálním rozdělením pro akciový index PX**

Model	Log-věrohodnostní funkce
<i>GJR-GARCH(1,1) s 5 zpožděními</i>	6229,20268
<i>GJR-GARCH(1,1) s 8 zpožděními</i>	6222,46497
<i>GJR-GARCH(1,1) s 10 zpožděními</i>	6218,37988

Pramen: Výstup z programu PCGive.

GJR-GARCH(1,1) model vykazuje velmi těsně při hladině významnosti 0,05 neautokorelovanost náhodné složky už při zahrnutí vysvětlované proměnné zpožděné o 8 období. Při předpokladu nenormálního rozdělení dostáváme nejlepší hodnotu zlogaritmované věrohodnostní funkce ve výši 6247,23296 u modelu nevykazující autokorelaci náhodné složky GJR-GARCH(1,1) s délkou zpoždění 10. U modelů s nejednotkovými parametry  $p$  a  $q$  dochází ke statisticky nevýznamným některým parametrům.

Z modelů GJR-GARCH bychom jako nejvhodnější k modelování vývoje logaritmů výnosů akciového indexu PX vybrali model **GJR-GARCH(1,1)** zahrnující zpožděné hodnoty vysvětlované proměnné o **10** období, který z modelů nevykazující autokorelaci a operující s nenormálním rozdělením indikuje největší hodnotu zlogaritmované věrohodnostní funkce.

Z množiny probraných modelů EGARCH a GJR-GARCH jsme nakonec vybrali po jednom z každé skupiny. Jaký model tedy nakonec zvolit pro zachycení vývoje logaritmů výnos časové řady závěrečných cen akciového indexu PX? Pomocnou ruku nám podají dvě souhrnné tabulky (9 a 10) preferovaných modelů.

**Tabulka 9**

**Věrohodnostní funkce a diagnostické testy modelu EGARCH(3,3) s 10 zpožděními pro akciový index PX**

Log-věrohodnostní funkce = 6225,5236
Portmanteau(37): $\chi^2(27) = 39,529$ [0,0567]
Asymptotic test: $\chi^2(2) = 179,40$ [0,0000]**
Normality test: $\chi^2(2) = 99,711$ [0,0000]**
ARCH 1-2 test: $F(4,2071) = 0,30224$ [0,8766]

Pramen: Výstup z programu PcGive.

**Tabulka 10**

**Věrohodnostní funkce a diagnostické testy modelu GJR-GARCH(1,1) s nenormálním rozdělením a 10 zpožděními pro akciový index PX**

Log-věrohodnostní funkce = 6247,23296
Portmanteau(37): $\chi^2(27) = 35,753$ [0,1208]
Asymptotic test: $\chi^2(2) = 228,41$ [0,0000]**
Normality test: $\chi^2(2) = 120,20$ [0,0000]**
ARCH 1-2 test: $F(2,2078) = 0,89945$ [0,4070]

Pramen: Výstup z programu PcGive.

Model EGARCH(3,3) s délkou zpoždění 10 vykazuje průkaznější homoskedasticitu, naopak model GJR-GARCH(1,1) se stejnou délkou zpoždění vysvětlované veličiny disponuje o něco větší významností testu na absenci autokorelace. Podle logaritmu věrohodnostní funkce lépe vystihuje modelovanou situaci model GJR-GARCH(1,1). Rozhodujeme se tedy pro model **GJR-GARCH(1,1)** s nenormálním rozdělením náhodné složky a zahrnutím **deseti** zpoždění.

### 3.3.2 Modely volatility pro akciový index FTSE 100

Jako v případě indexu PX i zde jsme analyzovali modely EGARCH – viz tabulku 11.

**Tabulka 11**

**Modely volatility EGARCH pro akciový index FTSE 100**

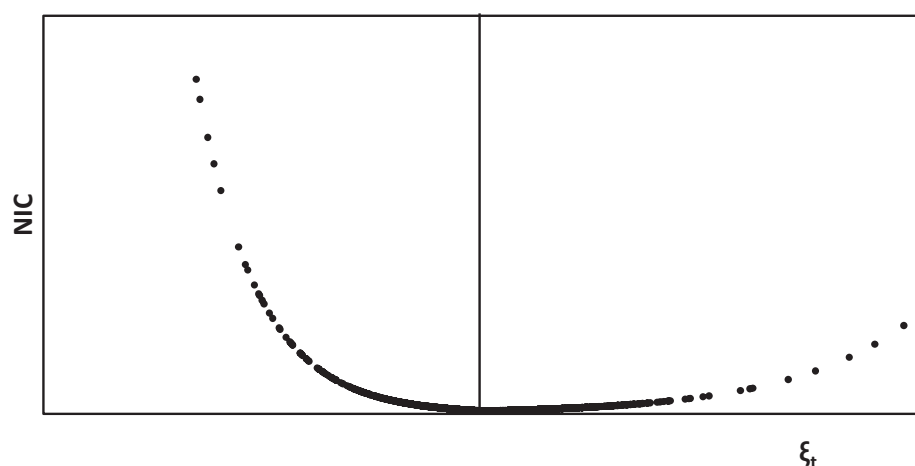
Model	Log-věrohodnostní funkce
<i>EGARCH(1,1) s normálním rozdělením</i>	6805,71461
<i>EGARCH(1,1) s nenormálním rozdělením</i>	6810,04048
<i>EGARCH(1,1) s normálním rozdělením a 1 zpožděním</i>	6806,72063
<i>EGARCH(1,1) s nenormálním rozdělením a 1 zpožděním</i>	6810,55349

Pramen: Výstup z programu PCGive.

Došli jsme k jedné podstatné odlišnosti. Model EGARCH(1,1) bez zpožděných hodnot nevykazuje autokorelaci reziduí, tudíž nejsme nuceni do modelu zapojit zpožděné hodnoty vysvětlované proměnné. Pro model se zpožděnou hodnotou o jedno období vychází logaritmus věrohodnostní funkce takřka totožně, u AIC kritéria také nacházíme podobné hodnoty. Při zanesení dalších zpožděných hodnot dochází k postupnému snižování obou zmíněných ukazatelů. Pro modely znázorněné v tabulce 11 platí statistická významnost všech parametrů. Diagnostické testy potvrzují homoskedasticitu a neautokorelovanost a nenormalitu rozdělení náhodné složky. Asymetrický efekt opět potvrzen pomocí příslušných testů, funkce NIC je toho dokladem.

**Obrázek 4**

**Funkce NIC modelu EGARCH(1,1) pro akciový index FTSE 100**



Pramen: Vlastní vyhotovení v MS EXCEL.

Pokud bychom vzali do úvahy modely EGARCH s parametry nerovnajícími se jedničce, pak identifikujeme jako nejvhodnější model pro popis vývoje logaritmu výnosů akciového indexu FTSE 100 **EGARCH(8,8)** s absencí jakékoliv zpožděné hodnoty s předpokladem normálního rozdělení. Tento model se stává s hodnotou logaritmu věrohodnostní funkce 6823,27882 a s největší průkazností homoskedasticity vítězem ze skupiny modelů volatility EGARCH. Pokud bychom uvažovali nenormální rozdělení náhodně složky, došli bychom sice ke zvýšení zlogaritmované věrohodnostní funkce o několik jednotek, některé parametry modelu by ale vycházely statisticky nevýznamné.

Pokud uděláme odhady různých modifikací modelů GJR-GARCH, vyjde nám jako nejlepší model pro popis volatility **GJR-GARCH(1,1)** s nenormálním rozdělením a zahrnutím jedné zpožděné hodnoty. Zpožděnou hodnotu nezavádíme kvůli alarmující indikaci autokorelace, ale jako element vylepšující logaritmus odhadové věrohodnostní funkce. Ostatní modely s větším počtem parametrů vykazují některé statistické testy parametrů nevýznamné či indikují nižší hodnoty zlogaritmované věrohodnostní funkce.

Otázkou zůstává, jaký model z nabídky zvolit. Opět si přehledně zobrazíme hlavní vlastnosti modelů.

**Tabulka 12**

**Věrohodnostní funkce a diagnostické testy modelu EGARCH(8,8) pro akciový index FTSE 100**

Log-věrohodnostní funkce = 6823,27882
Portmanteau(37): $\chi^2(37) = 46,753$ [0,1307]
Asymptotic test: $\chi^2(2) = 27,274$ [0,0000]**
Normality test: $\chi^2(2) = 21,612$ [0,0000]**
ARCH 1-2 test: $F(9,2105) = 1,2611$ [0,2533]

Pramen: Výstup z programu PcGive.

**Tabulka 13**

**Věrohodnostní funkce a diagnostické testy modelu GJR-GARCH(1,1) s nenormálním rozdělením a s 1 zpožděním pro akciový index FTSE 100**

Log-věrohodnostní funkce = 6823,27882
Portmanteau(37): $\chi^2(37) = 46,753$ [0,1307]
Asymptotic test: $\chi^2(2) = 27,274$ [0,0000]**
Normality test: $\chi^2(2) = 21,612$ [0,0000]**
ARCH 1-2 test: $F(9,2105) = 1,2611$ [0,2533]

Pramen: Výstup z programu PcGive.

Model EGARCH(8,8) vykazuje o něco lepší hodnotu logaritmu věrohodnostní funkce, stejně tak lépe vychází test podmíněné heteroskedasticity. Model GJR-GARCH (1,1)

sice vykazuje průkaznější neutokorelovanost náhodné složky, na druhé straně nepřítomnost podmíněné heteroskedasticity tak přesvědčivá není. Nakonec i hodnota zlogaritmované věrohodnostní funkce nabývá nižších hodnot, volba modelu i proto je jednoznačná, vybíráme model **EGARCH(8,8)**.

### Závěr

S přihlédnutím k výše popsaným principům fungování obchodních systémů na sledovaných burzách je volba jako vhodného modelu volatility akciového indexu PX **GJR-GARCH(2,2)** se zpožděnými hodnotami vysvětlované proměnné až do délky deset období a s nenormálním rozdělením náhodné složky a modelu **EGARCH(8,8)** s normálním rozdělením pro akciový index FTSE 100 adekvátní.

Nakonec připomeňme, že byla prokázána přítomnost asymetrického efektu, konkrétně pak větší vliv záporných výnosů do podmíněné heteroskedasticity než hodnot kladných. Zjištění nenormality nesystematické složky nebylo překvapením. Zahrnutí předpokladu rozdělení Studentova se ukázalo ve většině případů jako vhodné. Jelikož se náhodná složka u časových řad zdála být poněkud zešíklá, zakomponování určitého asymetrického rozdělení by mohlo napomoci k větší důvěryhodnosti modelu volatility. Během analýzy jsme museli též řešit problematiku autokorelace. Pro rozšíření obzorů v dané problematice bychom mohli zkoumat další typy nelineárních modelů, např. IEGARCH či STGARCH. Výsledné modely můžeme velmi dobře využívat pro finanční analýzy či při konstrukci předpovědí.

### Literatura

- ARLT, J.; ARLTOVÁ, M. 2007. *Ekonomické časové řady – vlastnosti, metody modelování, příklady a aplikace*. 1. vyd. Praha : Grada Publishing, 2007. 285 s. ISBN 978-80-247-1319-9.
- ARLT, J.; ARLTOVÁ, M. 2003. *Finanční časové řady – vlastnosti, metody modelování, příklady a aplikace*. 1. vyd. Praha : Grada Publishing, 2003. 220 s. ISBN 80-247-0330-0.
- HUŠEK, R. 2007. *Ekonometrická analýza*. 1. vyd. Praha : Oeconomica, 2007. 367 s. ISBN 978-80-245-1300-3.
- MUSÍLEK, P. 1996. *Finanční trhy: instrumenty, instituce a management (II. díl)*. 1. přeprac. vyd. Praha : Vysoká škola ekonomická, 1996. 851 s. ISBN 80-7079-726-6.
- Portál [www.bcpp.cz](http://www.bcpp.cz). 2010. *Báze indexu PX*. [online, 30. 10. 2010]. [www.bcpp.cz/ Statistika/ BurzovniIndexy/default.aspx/default.aspx?bi=1](http://www.bcpp.cz/Statistika/BurzovniIndexy/default.aspx/default.aspx?bi=1).
- Portál [www.ftse.com](http://www.ftse.com). 2010. *FTSE 100 Index – FACTSHEET* [online, 30. 10. 2010]. [www.ftse.com/Indices/UK\\_Indices/Downloads/FTSE\\_100\\_Index\\_Factsheet.pdf](http://www.ftse.com/Indices/UK_Indices/Downloads/FTSE_100_Index_Factsheet.pdf).
- Portál [www.londonstockexchange.com](http://www.londonstockexchange.com). 2010. *SETS on LSE* [online, 30. 10. 2010]. [www.londonstockexchange.com/products-and-services/trading-services/sets/sets.htm](http://www.londonstockexchange.com/products-and-services/trading-services/sets/sets.htm).
- Portál [www.patria.cz](http://www.patria.cz). 2010. *Databanka – Patria Online* [online, 20. 10. 2010]. [www.patria.cz/akcie/vyzkum/databanka.html](http://www.patria.cz/akcie/vyzkum/databanka.html).
- Portál [www.pcgive.com](http://www.pcgive.com). 2010. *PcGive* [online, 21. 10. 2010]. [www.pcgive.com/pcgive/index.html](http://www.pcgive.com/pcgive/index.html).
- Portál [www.sfinance.cz](http://www.sfinance.cz). 2010. *Představujeme londýnskou burzu* [online, 30. 10. 2010]. [www.sfinance.cz/zpravy/finance/198296-predstavujeme-londynskou-burzu-lse/](http://www.sfinance.cz/zpravy/finance/198296-predstavujeme-londynskou-burzu-lse/).
- Portál <http://cs.wikipedia.org>. 2010. *Volatilita* [online, 25. 10. 2010]. <http://cs.wikipedia.org/wiki/Volatilita>.
- Portál <http://en.wikipedia.org>. 2010. *FTSE 100 Index* [online, 30. 10. 2010]. [http://en.wikipedia.org/wiki/FTSE\\_100](http://en.wikipedia.org/wiki/FTSE_100).

Portál <http://en.wikipedia.org>. 2010. *London Stock Exchange* [online, 30. 10. 2010]. [http://en.wikipedia.org/wiki/London\\_Stock\\_Exchange](http://en.wikipedia.org/wiki/London_Stock_Exchange).

VESELÁ, J. 2005. *Burzy a burzovní obchody – výchozí texty ke studiu*. 1. vyd. Praha : VŠE, Nakladatelství Oeconomica, 2005. 189 s. ISBN 80-245-0939-3.

## COMPARISON OF VOLATILITY MODELS OF PX INDEX AND FTSE 100 INDEX

**Abstract:** The article deals with a typical phenomenon of financial time series – volatility. These time series usually embody intermittent periods of relative “calm” and quite high variability. A volatility modelling of time series is made with the help of special econometric volatility models which characterize the so-called conditional heteroskedasticity. The goal of this paper is to choose a suitable volatility model for Prague PX Index and London FTSE 100. The path to the aim is via a stationarity analysis of tracked time series of closing values of the mentioned indexes, conditional heteroskedasticity and autocorrelation tests and an identification of probability distribution of the studied quantity. A profiling of asymmetric effects is also very important because they determine the linear or nonlinear character of the resulting model.

**Keywords:** volatility, conditional heteroskedasticity, EGARCH, GJR-GARCH, function NIC

**JEL Classification:** C58